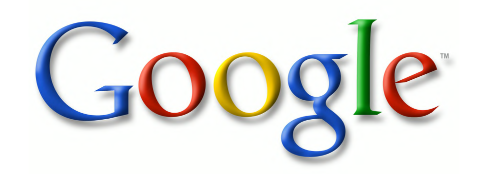
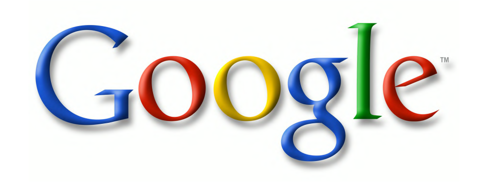






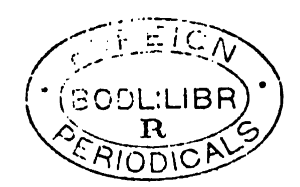
NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME SÉRIE.

1885.




ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,

RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CONDORCET.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME QUATRIÈME.



PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,

ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, n° 55.

1885

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

SUR LES ANTICAUSTIQUES PAR RÉFRACTION DE LA PARABOLE, LES RAYONS INCIDENTS ÉTANT PERPENDICULAIRES A L'AXE;

PAR M. E. LAGUERRE.

I.

1. L'hypercycle est la transformée, par semi-droites réciproques, de la parabole; c'est une courbe de direction de la quatrième classe et dont l'équation la plus générale, en coordonnées tangentielles et les axes étant rectangulaires, est de la forme

$$(\alpha u + \beta v + \gamma)^2 (u^2 + v^2)$$
$$= (A u^2 + 2 B u v + C v^2 + 2 D u + 2 E v)^2.$$

Ses propriétés les plus importantes sont les suivantes :

1° Les tangentes à la courbe peuvent être associées deux par deux, de telle sorte que deux tangentes conjuguées quelconques et deux semi-droites fixes (les semi-droites fondamentales de la courbe) forment un système harmonique [1].

---

[1] Deux couples de semi-droites forment un système harmonique, quand elles touchent un même cycle et que leurs points de contact partagent harmoniquement la circonférence.

Sur les propriétés mentionnées dans le texte, voir mon Mémoire sur les hypercycles (*Comptes rendus,* mars et avril 1882); dans toute la suite de cette Note, les renvois à ce Mémoire seront simplement indiqués par la lettre H.

2° L'enveloppe des conjuguées d'une semi-droite D, par rapport à tous les couples de tangentes conjuguées, est un cycle K que j'appellerai le cycle polaire de D.

Il est clair qu'un hypercycle est entièrement déterminé quand on se donne les semi-droites fondamentales, une droite quelconque du plan et son cycle polaire.

3° Le cycle polaire d'une tangente touche cette tangente en son point de contact avec la courbe.

4° En désignant par A, A′ et B, B′ deux couples quelconques de tangentes conjuguées, si l'on considère une tangente mobile quelconque T et si l'on construit les cycles inscrits dans les triangles AA′T et BB′T, la longueur comprise sur T entre les points de contact est constante en grandeur et en ligne ([1]).

2. Je rappellerai encore cette proposition importante :

A, B, C et D désignant les quatre tangentes communes à un cycle et à un hypercycle, si l'on considère les tangentes conjuguées C′ et D′ de deux quelconques d'entre elles C et D, les semi-droites A, B, C′ et D′ touchent un même cycle.

En voici quelques conséquences : étant prises arbitrairement cinq semi-droites P, Q, A, B, C du plan, il existe un hypercycle généralement bien déterminé pour lequel P et Q sont les semi-droites fondamentales et qui touche A, B, C.

Soient D la quatrième tangente que cette courbe a en commun avec le cycle inscrit dans le triangle ABC, et A′, B′, C′, D′ les conjuguées harmoniques de A, B, C, D relativement à P et à Q; il résulte de la proposition précédente que les semi-droites A, B, C′, D′ touchent un

---

([1]) II, N° 14.

même cycle et il en est de même des semi-droites A, B′, C, D′ et des semi-droites A′, B, C, D′.

Les cycles inscrits dans les triangles ABC′, AB′C et A′BC touchent donc tous les trois la semi-droite D′; ce qui permet de déterminer la quatrième tangente commune D.

3. On peut encore énoncer la proposition suivante :

Si l'on désigne par (A, A′), (B, B′), (C, C′) *trois couples de semi-droites formant une involution, les cycles inscrits dans les triangles* ABC′, AB′C *et* A′BC *touchent une même semi-droite.*

Supposons, en particulier, que les semi-droites doubles de l'involution soient les droites isotropes passant par un point O du plan, deux semi-droites conjuguées sont alors symétriques par rapport au point O; d'où cette conclusion :

Si (A, A′), (B, B′) *et* (C, C′) *sont trois couples de semi-droites symétriques par rapport à un point* O *du plan, les cycles inscrits dans les triangles* ABC′, AB′C *et* A′BC *touchent une même semi-droite.*

Le même théorème aurait encore lieu si la symétrie des couples avait lieu par rapport à une droite quelconque du plan.

II.

4. Une parabole peut être considérée comme un hypercycle et comme une courbe double; en chacun de ses points on peut mener deux tangentes qui sont des semi-droites opposées. Ses semi-droites fondamentales sont les semi-droites opposées déterminées par l'axe de la courbe; il en résulte que deux tangentes conjuguées sont *symétriques* par rapport à l'axe.

Toutes les propriétés des hypercycles appartiennent donc à la parabole et constituent des propriétés nouvelles de cette courbe.

5. Transformons une parabole par semi-droites réciproques en prenant pour axe de transformation l'axe de la courbe elle-même; il est clair que les semi-droites fondamentales de la transformée seront encore les semi-droites opposées déterminées par l'axe et que les tangentes conjuguées seront symétriques par rapport à cet axe.

Réciproquement tout hypercycle jouissant de la propriété, que deux tangentes conjuguées sont symétriques par rapport à une droite D, est la transformée d'une parabole P ayant cette droite pour axe; l'axe de transformation est également D.

Un point quelconque M de la parabole a pour transformé un cycle K dont le centre décrit une parabole P′ ayant pour axe D, tandis que son rayon varie proportionnellement à sa distance à l'axe; la transformée est donc une des anticaustiques par réfraction de la parabole P′, lorsque les rayons incidents sont perpendiculaires à l'axe.

Je la désignerai sous le nom d'*anticaustique principale*.

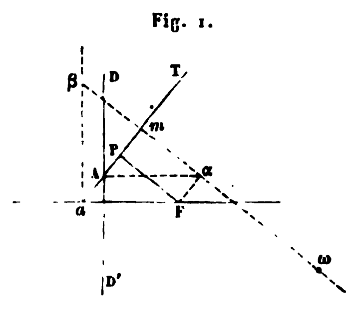
6. Ainsi les anticaustiques principales sont les hypercycles pour lesquels les semi-droites fondamentales sont opposées.

Considérons une telle courbe et soit F le point où une tangente isotrope coupe son axe, la tangente symétrique étant la seconde droite isotrope qui passe par ce point, on voit que F est le foyer de la courbe et que les droites isotropes, qui se croisent en ce point, forment un couple de tangentes conjuguées.

Menons une tangente parallèle à une direction perpendiculaire à l'axe, sa symétrique lui est opposée; nous avons donc une tangente double apparente perpendiculaire à l'axe, et les deux semi-droites opposées qu'elle détermine constituent également un couple de tangentes conjuguées.

Soient (*fig.* 1) une anticaustique principale ayant F pour foyer et DD' comme tangente double, AT une tan-

Fig. 1.



gente quelconque à cette courbe. Les deux droites opposées DD' et D'D formant un système de tangentes conjuguées, on voit que le cycle qui touche ces tangentes et la tangente AT se réduit au point A où cette tangente coupe DD'; son point de contact avec ce cycle est également le point A. D'autre part, le cycle qui touche les droites isotropes issues du point F et la tangente AT est le cycle qui a pour centre F; son point de contact avec AT est donc le pied P de la perpendiculaire abaissée du point F.

D'une proposition fondamentale énoncée plus haut, il résulte d'ailleurs, puisque les droites isotropes issues du point F constituent un système de tangentes conjuguées, que *la distance* AP *est constante en grandeur et en signe;* ainsi :

Toute anticaustique principale peut être considérée

comme l'enveloppe d'un des petits côtés d'un triangle rectangle de forme invariable dont l'extrémité, située sur l'hypoténuse, décrit une droite, tandis que l'autre petit côté passe par un point fixe.

Les autres anticaustiques étant des courbes parallèles à l'anticaustique principale, on peut énoncer encore la proposition suivante :

Soit ABCD *un quadrilatère de forme invariable, dans lequel les deux angles* B *et* C *sont droits; si l'on déplace ce quadrilatère de façon que le côté* BC *passe par un point fixe* F *et que le sommet* A *décrive une droite* Δ, *le côté* CD *enveloppe une anticaustique d'une parabole ayant pour foyer le point* F, *les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe.*

7. La proposition que je viens de démontrer peut s'énoncer ainsi :

Si, du foyer d'une anticaustique principale, on abaisse une perpendiculaire à une tangente à cette courbe, la distance Δ, comprise entre le pied de cette perpendiculaire et le point où la tangente rencontre la tangente double, est constante.

Plusieurs cas particuliers sont à remarquer : dans le cas où $\Delta = 0$, la courbe se réduit à une parabole ; quand la tangente double passe par le foyer, la courbe a alors le foyer pour centre.

Enfin, quand Δ est égal à la distance du foyer à la tangente double (c'est le cas de la *réflexion*), la classe de la courbe s'abaisse et elle devient un *hypercycle cubique,* ou plus exactement elle se décompose en un hypercycle cubique et un semi-point situé à l'infini sur la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente double.

De là une propriété nouvelle de l'hypercycle cubique, que l'on peut énoncer ainsi :

Si des rayons, menés parallèlement à une direction quelconque, se réfléchissent sur une parabole, parmi toutes les anticaustiques correspondantes, il y en a une qui a un axe de symétrie; si, du foyer de la parabole, on mène une perpendiculaire à une tangente quelconque à cette courbe, la distance, comprise entre le pied de cette perpendiculaire et le point où la tangente rencontre la tangente double est constante et égale à la distance du foyer à cette tangente double.

8. Soit une anticaustique principale ayant pour foyer le point F et pour tangente double la droite DD'.

Considérons (*fig.* 1) une tangente AT à cette courbe et construisons le cycle polaire de cette semi-droite; nous savons qu'il lui est tangent. Il touche également la conjuguée harmonique de AT relativement aux deux tangentes opposées DD' et D'D, qui constituent un couple de tangentes conjuguées; le centre de ce cycle est donc sur la droite menée par le point A perpendiculairement à DD'. Ce cycle touche la conjuguée harmonique de AT relativement aux deux droites isotropes issues du point F (ces droites forment en effet un couple de tangentes conjuguées); et, comme cette conjuguée est la symétrique de AT relativement au point F, le centre cherché est sur la droite menée par le point F parallèlement à AT.

Ce centre est donc le point α et, le cycle polaire d'une tangente touchant cette semi-droite en son point de contact avec la courbe, on voit que le point de contact de AT est le pied m de la perpendiculaire abaissée du point α.

On serait arrivé à ce résultat en considérant l'anti-

caustique comme l'enveloppe du côté d'un triangle rectangle de forme invariable dont un sommet A décrit la droite DD' pendant que le côté PF passe par le point fixe F; il est clair, en effet, que le centre instantané de rotation de la figure est le point α que j'ai déterminé précédemment.

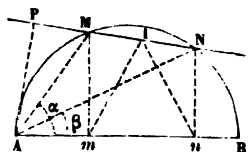
Pour construire le centre de courbure correspondant au point m ([1]), je remarque que, la tangente conjuguée de AT étant la symétrique relativement à l'axe de la courbe, le cycle, qui touche l'anticaustique au point m et la conjuguée de AT, a son centre au point de rencontre de la normale $m\alpha$ avec la droite, menée parallèlement à DD', par le point a où la tangente AT rencontre l'axe.

En désignant par β ce point de rencontre, il résulte d'un théorème, que j'ai donné dans mon Mémoire sur les hypercycles, que le centre de courbure cherché est le point ω symétrique de β par rapport à α.

III.

9. Une anticaustique principale étant donnée, il im-

Fig. 2.



porte de construire la parabole sur laquelle se sont réfractés les rayons.

Pour la solution de cette question, je démontrerai

([1]) *Voir* H, n° 14.

d'abord quelques lemmes préliminaires. Un cercle étant décrit sur un segment AB comme diamètre (*fig.* 2), soient m et n les projections sur ce diamètre de deux points M et N de la courbe, et P la projection sur la droite MN de l'extrémité A du diamètre; cela posé :

Lemme I. — On a l'égalité

$$\frac{\overline{PN}^2}{\overline{Pn}^2} = \frac{Bm}{Bn}.$$

Lemme II. — En désignant par I le milieu de la corde MN, on a

$$Im = In = IP;$$

en d'autres termes,

$$\overline{AP}^2 = Am.An.$$

10. Pour les démontrer, je remarque que l'angle APM étant droit, l'angle $\widehat{PAN}$ est égal à l'angle $\widehat{MAB}$; faisons, pour un instant,

$$\widehat{MAB} = \alpha, \quad \widehat{NAB} = \beta.$$

Les deux triangles PAN et NAn donnent

$$\frac{\overline{PN}^2}{\overline{Nn}^2} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{\overline{Mm}^2.\overline{AN}^2}{\overline{AM}^2.\overline{Nn}^2} = \frac{Am.Bm.An.AB}{Am.AB.An.Bn} = \frac{Bm}{Bn}.$$

En second lieu, le triangle APN donne

$$\overline{AP}^2 = \overline{AN}^2.\cos^2\alpha = \frac{\overline{AN}^2.\overline{Am}^2}{\overline{AM}^2} = \frac{An.AB.Am^2}{Am.AB} = Am.An.$$

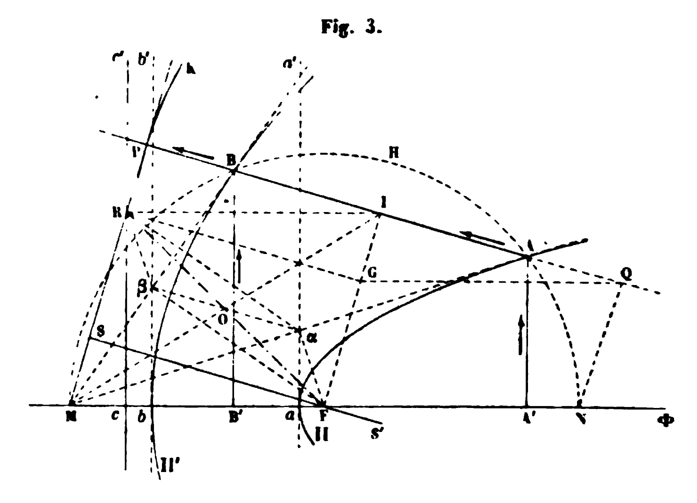
C. Q. F. D.

11. Considérons maintenant deux paraboles Π et Π' (*fig.* 3) ayant le point F pour foyer et pour sommets respectifs les deux points a et b de la droite FΦ.

Par un point quelconque M de cette droite, menons une tangente à chacune des paraboles et soient respectivement A et B leurs points de contact; on sait que le cercle, ayant pour centre le foyer F et passant par le point M, contient les points A et B; j'appellerai N le point où il rencontre de nouveau l'axe FΦ.

Du point M abaissons une perpendiculaire MP sur la droite AB, et, par le point I milieu du segment AB, me-

Fig. 3.



nons une parallèle à l'axe qui rencontre MP au point R, il est clair que la figure MRIF est un parallélogramme.

Soient maintenant α et β les milieux respectifs des segments MA et MB; la droite $\alpha\beta$ est évidemment parallèle à AB et partagée en parties égales par la droite MI en son point milieu O; d'où il suit que la figure RβFα est un parallélogramme.

Ainsi les segments Rβ et αF sont égaux et parallèles, c, b et a étant les pieds des perpendiculaires abaissées sur l'axe des points R, β et α; on a donc

$$Fc = Fa + Fb;$$

d'où il résulte que Fc est constant et que, quand le point M varie, le point R décrit la droite cc'.

J'abaisse maintenant du point F la perpendiculaire FS sur la droite MP, du point R la perpendiculaire RG sur la droite FI et du point N la perpendiculaire NQ sur la droite AB; il est clair que RS est égal à FG, et encore à NQ, car il est aisé de voir que la figure GQFN est un parallélogramme.

Or, en désignant par A' et B' les pieds des perpendiculaires abaissées sur l'axe des points A et B, il suit du lemme II que l'on a

$$\overline{NQ}^2 = \overline{RS}^2 = NA'.NB' = \frac{Fa.Fb}{i}.$$

D'où il suit que la longueur RS est constante lorsque le point M se déplace; nous avons ainsi un triangle rectangle RSF dont un petit côté passe constamment par le point F, tandis que l'autre petit côté est constant et que le sommet R décrit la droite cc'.

Il en résulte donc, d'après ce que j'ai démontré plus haut, que RS enveloppe une anticaustique principale de parabole; le centre instantané de rotation étant d'ailleurs évidemment le point I, la tangente RS touche son enveloppe au point P.

12. Soit K l'hypercycle symétrique enveloppé par RS; si, du point A comme centre, on décrit un cercle ayant AP pour rayon, il est clair que son enveloppe est la courbe K; or, il résulte du lemme I que l'on a

$$\frac{AP}{AA'} = \sqrt{\frac{NB'}{NA'}} = \sqrt{\frac{Fb}{Fa}}.$$

D'où il suit que ce rapport est constant et que K est l'anticaustique principale de la parabole Π, les rayons incidents étant perpendiculaire à l'axe et le module de

réfraction étant

$$\sqrt{\frac{Fb}{Fa}}.$$

On démontrerait de même que K est l'anticaustique principale de la parabole Π′, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe et le module de réfraction étant

$$\sqrt{\frac{Fa}{Fb}}.$$

13. Il est maintenant facile de résoudre le problème suivant :

Un hypercycle K est l'enveloppe du côté RS d'un triangle rectangle RSS′, dont le côté SS′ passe constamment par le point fixe F (*fig.* 3), dont le côté RS a une longueur constante et dont le sommet R décrit la droite cc'; trouver les paraboles pour lesquelles cette courbe est une anticaustique principale.

A cet effet, que du point F on abaisse une perpendiculaire à cc' rencontrant le côté RS en M, et que de ce même point comme centre on décrive un cercle H passant par M; que l'on détermine le point de rencontre I de la droite menée par F perpendiculairement à SS′ et de la droite menée par R perpendiculairement à cc', puis que par I on mène une droite Δ parallèle à SS′. Cela posé, si l'on imagine les deux paraboles qui, ayant F pour foyer et ayant leur axe perpendiculaire à cc', passent respectivement par les points de rencontre de Δ et du cercle H, on obtiendra les deux paraboles pour lesquelles K est une anticaustique principale.

Il est à remarquer que ces deux paraboles ne sont pas toujours réelles; elles seront imaginaires si la droite Δ et le cercle H ne se rencontrent pas.

FORMULES D'ALGÈBRE. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. G.-H. HALPHEN.

Dans ce petit Mémoire on trouvera démontrés, par les moyens les plus élémentaires, des résultats importants que l'on considère d'habitude comme étant réservés à la théorie des covariants. Sur quelques points même ces résultats dépassent un peu ce qui se rencontre dans les meilleurs Ouvrages, notamment la décomposition des polynômes du quatrième degré en facteurs linéaires.

Une proposition très simple et, je crois, très curieuse sert ici de fondement. Je vais l'établir d'abord.

PROPOSITION. — *Soient f et φ deux polynômes entiers, d'un même degré n, par rapport à une variable x; la quantité ci-après, composée avec les dérivées de ces polynômes, est une constante*

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} (f\varphi) = {} & f\varphi^{(n)} - f'\varphi^{(n-1)} + f''\varphi^{(n-2)} - \ldots \\ & + (-1)^{n-1} f^{(n-1)}\varphi' + (-1)^n f^{(n)}\varphi. \end{aligned} \right.$$

Si, en effet, l'on prend la dérivée de $(f\varphi)$, en observant que $f^{(n+1)}$ et $\varphi^{(n+1)}$ sont nulles, on voit tous les termes s'entredétruire. La dérivée de $(f\varphi)$ est donc nulle, et $(f\varphi)$ est une constante.

Sur ce sujet, il convient de faire quelques observations. D'abord, si l'on veut exprimer la constante $(f\varphi)$ par les coefficients de f et de φ, il suffira de supposer $x = 0$. Soient donc

$$f = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} + \ldots + n a_{n-1} x + a_n,$$

$$\varphi = b_0 x^n + n b_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} b_2 x^{n-2} + \ldots + n b_{n-1} x + b_n.$$

On trouve immédiatement

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{1.2.3\ldots n}(f\varphi) &= a_n b_0 - n a_{n-1} b_1 \\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2} a_{n-2} b_2 + \ldots + (-1)^n a_0 b_n. \end{aligned} \right.$$

Il va de soi que l'on peut envisager la constante $(f\varphi)$ pour deux polynômes de degrés différents; en ce cas, n est le degré le plus élevé.

On peut encore prendre deux polynômes identiques entre eux. Si le degré est impair, la constante (ff) se réduit à zéro; car les termes équidistants des extrêmes se détruisent deux à deux. Mais, si le degré est pair, (ff) n'est généralement pas nul.

Voici une des plus curieuses conséquences de notre proposition. Elle n'a aucun lien avec ce qui va suivre; c'est pourquoi je la joins aux préliminaires.

Soit supposé donné le polynôme f, et considérons comme inconnu le polynôme φ le plus général qui satisfasse à la relation $(f\varphi) = 0$. Il est manifeste qu'on peut composer φ au moyen de n polynômes particuliers φ_1, φ_2, ..., φ_n dont chacun vérifie la relation $(f\varphi_k) = 0$; on aura

$$\varphi = l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \ldots + l_n\varphi_n,$$

les l désignant des constantes arbitraires. Soit a une racine de f; si l'on prend $\varphi = (x - a)^n$, l'expression (1) de $(f\varphi)$ contient le facteur $(x - a)$; donc $(f\varphi)$ est nulle en ce cas. Désignant par a_1, a_2, ..., a_n les racines de f; on aura donc, pour l'expression la plus générale de φ,

$$\varphi = l_1(x - a_1)^n + l_2(x - a_2)^n + \ldots + l_n(x - a_n)^n.$$

Mais la relation $(f\varphi) = 0$ est symétrique en f et φ; on a donc cette conséquence : *Les lettres a, l, α désignant des constantes, soit*

$$\begin{aligned} &l_1(x - a_1)^n + l_2(x - a_2)^n + \ldots + l_n(x - a_n)^n \\ &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n); \end{aligned}$$

il existe n constantes λ donnant lieu à la relation semblable

$$\lambda_1(x-\alpha_1)^n+\lambda_2(x-\alpha_2)^n+\ldots+\lambda_n(x-\alpha_n)^n$$
$$=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

Ce théorème curieux, dû à M. Rosanes, ne pouvait être omis ici. Je vais maintenant faire de la proposition ci-dessus une série d'applications.

I. — Résolution de l'équation du second degré.

Soit f un polynôme du second degré, on a

$$(ff)=2ff''-f'^2,$$

et par suite

$$2ff''=\left[f'+\sqrt{-(ff)}\right]\left[f'-\sqrt{-(ff)}\right].$$

Le polynôme f est ainsi décomposé en facteurs linéaires, et l'équation $f=0$ est résolue par la formule

$$f'=\pm\sqrt{-(ff)}.$$

II. — Élimination entre deux équations du second degré.

Soient f et φ du second degré; envisageons les trois constantes

$$(ff)=2ff''-f'^2,\quad (\varphi\varphi)=2\varphi\varphi''-\varphi'^2,\quad (f\varphi)=f\varphi''-f'\varphi'+f''\varphi.$$

Dans la combinaison $(f\varphi)^2-(ff)(\varphi\varphi)$, le terme $f'^2\varphi'^2$ disparaît; tous les termes qui subsistent contiennent soit f, soit φ. S'il existe donc une valeur de x qui rende nuls à la fois ces deux polynômes, la quantité envisagée sera nulle pour cette valeur de x; étant constante, elle sera toujours nulle. Donc

$$(f\varphi)^2-(ff)(\varphi\varphi)=0$$

est la condition pour que $f = 0$ et $\varphi = 0$ aient une racine commune, ou le résultat de l'élimination de x. En exprimant les constantes par les coefficients suivant (2), on obtient

$$(a_0 b_2 - 2 a_1 b_1 + a_2 b_0)^2 = 4(a_0 a_2 - a_1^2)(b_0 b_2 - b_1^2).$$

III. — Condition pour qu'une équation du troisième degré ait une racine double.

Soit f un polynôme du troisième degré

$$f = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3.$$

Considérons, en premier lieu, la constante

$$(3)\qquad A = (f'f') = 2f'f''' - f''^2 = 2^2.3^2(a_0 a_2 - a_1^2).$$

Envisageons maintenant le polynôme φ ainsi défini,

$$\varphi = 2f'^2 - 3ff''.$$

Il est seulement du second degré, car sa dérivée seconde est une constante

$$(4)\qquad \varphi' = f'f'' - 3ff''', \quad \varphi'' = f''^2 - 2f'f''' = -A\ (^1).$$

Introduisons maintenant la constante $(f''\varphi')$

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} B = (f''\varphi') &= f''^3 - 3f'f''f''' + 3ff'''^2 \\ &= 2^2.3^3(2a_1^3 - 3a_2 a_1 a_0 + a_3 a_0^2). \end{aligned} \right.$$

Dans la combinaison $B^2 + A^3$ le terme f''^6 disparait

---

(1) Généralement, f étant un polynôme du $n^{\text{ième}}$ degré,

$$\varphi = (n-1) f'^2 - nff''$$

est seulement du degré $(2n-4)$, comme on l'établit habituellement par le théorème des fonctions homogènes. On peut aussi le prouver en considérant la dérivée d'ordre $(2n-4)$, qui a pour expression

$$-\frac{(2n-4)!}{(n-2)!(n-1)!}[f^{(n-1)}f^{(n-1)}].$$

et tous les termes qui subsistent contiennent l'un des facteurs f ou f'. Suivant donc le même raisonnement qu'au n° II, la constante $B^2 + A^3$ est nulle quand f et f' ont une racine commune. Donc *la condition pour que le polynôme f ait une racine double s'exprime par l'égalité*

$$B^2 + A^3 = 0.$$

Si f contient le facteur $(x - a)^2$, on voit, par l'expression de φ, que le polynôme φ contient ce même facteur. Donc *la même condition peut aussi s'exprimer par l'égalité* $(\varphi\varphi) = 0$. Ceci conduit à la relation

$$(\varphi\varphi) = 2(2f'^2 - 3ff'')(f''^2 - 2f'f''') \\ - (f'f'' - 3ff''')^2 = -\frac{B^2 + A^3}{f'''^2},$$

qui peut aisément être vérifiée. Si l'on met, pour x, la racine de f'', $(\varphi\varphi)$ se réduit à deux termes, B et A chacun à un seul terme, et l'identité des deux membres est alors manifeste. Elle a donc lieu constamment, puisque ces deux membres sont constants.

Cette identité donne un calcul rapide pour la quantité

$$R = \frac{B^2 + A^3}{f'''^2} = -(\varphi\varphi) = -3f'^2f''^2 + 8f'^3f''' \\ + 6ff''^3 - 18ff'f''f''' + 9f^2f'''^2 \\ = -2^2.3^4(3a_2^2a_1^2 - 4a_2^3a_0 - 4a_3a_1^3 + 6a_3a_2a_1a_0 - a_3^2a_0^2).$$

L'expression de R permet aisément la distinction des deux cas que peut offrir f au point de vue de la réalité des racines.

Supposons, pour fixer les idées, a_0 positif, par suite f''' positif.

1° Soit $R > 0$. Si l'on met, pour x, une racine de f, R se réduit à $-3f'^2f''^2 + 8f'^3f'''$. Puisque R et f''' sont positifs, nécessairement f' l'est aussi. Donc f ne

peut passer par zéro qu'en croissant, donc f n'a qu'une racine réelle.

2° Soit $R < 0$. Nécessairement A est négatif, et, puisque $A = (f'f')$, on voit, par le n° I, que f' a ses racines réelles. Soient a, b les deux racines de f', et $a < b$. Quand $f' = 0$, R se réduit à $6ff''^3 + 9f^2f'''^2$. Puisque R est négatif, f a le signe opposé à celui de f''. Donc f est positive pour $x = a$, négative pour $x = b$. Donc f a trois racines réelles. Donc *f a deux racines imaginaires, une racine double, ou trois racines réelles suivant que* R *est positif, nul ou négatif.*

Les expressions de A et B conduisent aussi à la conséquence

$$f''^3 + 3Af'' + 2B = 6f'''^2 f. \qquad (6)$$

De là résultent la *transformée privée du second terme*

$$f''^3 + 3Af'' + 2B = 0,$$

avec l'inconnue $f'' = 6(a_0x + a_1)$, et le caractère de réalité des racines rapporté au signe de la quantité $B^2 + A^3$, comme il est d'usage.

IV. — Décomposition d'un polynome du troisième degré en la différence de deux cubes.

Les notations sont ici les mêmes qu'au n° III.

Considérons le polynôme ψ composé ainsi :

$$\psi = 2f'\varphi - 3\varphi' f = 4f'^3 - 9ff'f'' + 9f^2 f'''.$$

Il est seulement du troisième degré ; car $f'\varphi$ et $\varphi' f$ sont tous deux du quatrième degré, mais le terme en x^4 disparaît dans la combinaison ψ. Le polynôme $(\psi^2 - 2\varphi^3)$ est donc du sixième degré : les deux termes f'^6 et ff'^4f'' disparaissant, f^2 est en facteur. Donc ce polynôme ne diffère de f^2 que par un coefficient constant.

Supposant, pour x, une racine de f', on voit $\frac{\psi^2-2\varphi^3}{f^2}$ se réduire à $(9ff'')^2+2.3^3ff''^3$. C'est à quoi se réduit aussi $9R$. Ces deux quantités, étant constantes, sont donc toujours égales. De là l'identité

$$\psi^2-9Rf^2=2\varphi^3.$$

Décomposons le polynôme du second degré φ en facteurs linéaires (n° I), observons l'égalité $(\varphi\varphi)=-R$, et nous aurons

$$(7)\qquad 4\varphi''^3(\psi^2-9Rf^2)=(\varphi'+\sqrt{R})^3(\varphi'-\sqrt{R})^3.$$

Tenons compte de l'expression $\varphi''=-A$ pour en déduire

$$\varphi''^3=-A^3=B^2-f'''^2R.$$

Observons enfin que, en général, f n'ayant aucune racine commune avec f'', les polynômes f et φ, et par suite f et ψ sont premiers entre eux, pour conclure de (7) les deux relations ci-après, où λ est une constante,

$$(8)\qquad \begin{cases} 2(B+f'''\sqrt{R})(\psi+3f\sqrt{R})=\lambda(\varphi'\pm\sqrt{R})^3, \\ 2(B-f'''\sqrt{R})(\psi-3f\sqrt{R})=\frac{1}{\lambda}(\varphi'\mp\sqrt{R})^3. \end{cases}$$

Il reste à déterminer λ et le signe devant $\sqrt{R}$ dans les seconds membres. D'après la relation

$$R=-(\varphi\varphi)=\varphi'^2-2\varphi\varphi'',$$

en supposant x racine de φ, on aura $R=\varphi'^2$. Prenons $\sqrt{R}=\varphi'$. Comme on a alors $\psi=-3\varphi' f$, on voit que $\psi+3f\sqrt{R}$ s'évanouit. Le signe $\pm$ doit donc être remplacé par le signe $-$. Prenons maintenant la seconde équation (8) et observons que, en supposant toujours x

racine de φ, on a

$$\varphi'+\sqrt{R}=2\varphi',\quad B=f''\varphi''-f'''\varphi',\quad B+f'''\sqrt{R}=f''\varphi'',$$
$$B-f'''\sqrt{R}=-\frac{A^3}{f''\varphi''}=\frac{\varphi''^2}{f''},\quad \psi-3f\sqrt{R}=-6f\varphi'.$$

Il résulte de là l'expression suivante de la constante λ, en supposant toujours x racine de φ,

$$\frac{1}{\lambda}=-\frac{3}{2}\frac{\varphi''^2}{\varphi'^2}\frac{f}{f''},$$

qui, d'après l'hypothèse $\varphi=0$, se transforme en

$$\frac{1}{\lambda}=-\left(\frac{\varphi''f'}{\varphi'f''}\right)^2.$$

D'ailleurs, on a identiquement

$$(\varphi f')=\varphi f'''-\varphi'f''+\varphi''f'=0;$$

par conséquent, pour x racine de φ, on a

$$\varphi''f'=\varphi'f'',\quad \lambda=-1.$$

Les deux identités (8) prennent donc définitivement la forme

$$2(B+f'''\sqrt{R})(\psi+3f\sqrt{R})=-(\varphi'-\sqrt{R})^3,$$
$$2(B-f'''\sqrt{R})(\psi-3f\sqrt{R})=-(\varphi'+\sqrt{R})^3;$$

d'où l'on tire

$$\psi-3f\sqrt{R}=\frac{1}{2}\frac{B+f'''\sqrt{R}}{A^3}(\varphi'+\sqrt{R})^3,$$

$$\psi+3f\sqrt{R}=\frac{1}{2}\frac{B-f'''\sqrt{R}}{A^3}(\varphi'-\sqrt{R})^3,$$

(9) $$12A^3\sqrt{R}f=(B-f'''\sqrt{R})(\varphi'-\sqrt{R})^3-(B+f'''\sqrt{R})(\varphi'+\sqrt{R})^3.$$

Ainsi est obtenue la décomposition de f en la différence des cubes de deux polynômes du premier degré en x.

On remarquera, en passant, que ψ est, à un facteur constant près, la somme des deux mêmes cubes.

V. — Décomposition d'un polynome du troisième degré en facteurs linéaires.

Les notations étant les mêmes qu'aux n[os] III et IV, posons

$$(10)\qquad B + f'''\sqrt{R} = \alpha^3, \quad B - f'''\sqrt{R} = \beta^3.$$

Il en résulte

$$\alpha^3\beta^3 = B^2 - f'''^2 R = - A^3.$$

La quantité α^3 a trois racines cubiques α, α', α''. A chacune d'elles adjoignons, dans le même ordre, les racines cubiques β, β', β'' de β^3, par les conditions

$$\alpha\beta = \alpha'\beta' = \alpha''\beta'' = - A.$$

Dénotant par Π le symbole du produit de trois facteurs analogues, obtenus en remplaçant α, β successivement par α', β' et α'', β'', écrivons la formule (9) ainsi :

$$12 A^3\sqrt{R}f = - \prod\left[\alpha(\varphi' + \sqrt{R}) - \beta(\varphi' - \sqrt{R})\right]$$

$$= - \prod\left[(\alpha - \beta)\varphi' + (\alpha + \beta)\frac{\alpha^3 - \beta^3}{2f'''}\right].$$

Mettant en dehors $(\alpha - \beta)$ dans chaque facteur, et observant que le produit $(\alpha - \beta)(\alpha' - \beta')(\alpha'' - \beta'')$ est $\alpha^3 - \beta^3$, c'est-à-dire $2f'''\sqrt{R}$, nous avons cette nouvelle forme

$$6A^3 f = - f''' \prod\left[\varphi' + \frac{\alpha^3 + \beta^3}{2f'''} + \frac{\alpha\beta(\alpha + \beta)}{f'''}\right].$$

D'après (10), (4), (3) et (5)

$$\varphi' + \frac{\alpha^3 + \beta^3}{2f'''} = \frac{1}{f'''}(\varphi' f''' + B) = - \frac{A f''}{f'''}.$$

Substituant cette expression dans le produit et mettant aussi $-A$ au lieu de $\alpha\beta$, nous avons enfin

$$6f'''^2 f = \prod (f'' + \alpha + \beta).$$

Telle est finalement la formule de décomposition du polynôme f en facteurs linéaires. Elle se résume ainsi : *Soit* α *une des racines cubiques de* $B + f'''\sqrt{R}$, *et soit* β *celle des racines cubiques de* $B - f'''\sqrt{R}$, *dont le produit par* α *donne* $-A$; *soit* ω *une racine cubique imaginaire de l'unité, on a*

(11) $$6f'''^2 f = (f'' + \alpha + \beta)(f'' + \omega\alpha + \omega^2\beta)(f'' + \omega^2\alpha + \omega\beta).$$

En égalant à zéro chacun des trois facteurs successivement, on a les trois racines de l'équation $f = 0$ sous la forme de Cardan.

La formule (11) peut, *a posteriori*, être vérifiée aisément. Son second membre est *identiquement* égal à

$$f''^3 + \alpha^3 + \beta^3 - 3\alpha\beta f''.$$

D'après les expressions de α, β, ceci n'est autre que $f''^3 + 2B + 3Af''$ ou $6f'''^2 f$, comme on l'a trouvé déjà (6).

VI. — Condition pour qu'une équation du quatrième degré ait une racine double.

Soit f un polynôme du quatrième degré

$$f = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4.$$

Formons d'abord la combinaison constante

$$I = (ff) = 2ff^{\text{IV}} - 2f'f''' + f''^2 = 48(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2),$$

puis le polynôme du quatrième degré

(12) $$\varphi = 3f'^2 - 4ff'',$$

dont les dérivées sont

$$\varphi' = 2f'f'' - 4ff''', \quad \varphi'' = 2f''^2 - 2f'f''' - 4ff^{\text{iv}},$$
$$\varphi''' = 2f''f''' - 6f'f^{\text{iv}}, \quad \varphi^{\text{iv}} = 2f'''^2 - 4f''f^{\text{iv}} = -2(f''f'').$$

Composons enfin avec f et φ la constante (φf)

$$(13) \quad \begin{cases} J = (\varphi f) = 9f'^2 f^{\text{iv}} - 12ff''f^{\text{iv}} - 6f'f''f''' + 6ff'''^2 + 2f''^3 \\ = 2^7.3^3(a_3^2 a_0 - a_4 a_2 a_0 - 2a_3 a_2 a_1 + a_4 a_1^2 + a_2^3). \end{cases}$$

Si l'on suppose, en même temps, nuls f et f', I se réduit à f''^2, J à $2f''^3$ et $J^2 - 4I^3$ à zéro. Donc, suivant un raisonnement déjà employé, *la condition pour l'existence d'une racine double dans l'équation $f = 0$ est*

$$J^2 - 4I^3 = 0.$$

VII. — Conditions pour qu'un polynome du quatrième degré soit un carré.

Si f contient un facteur linéaire au carré, ce facteur appartient à f' et se trouve au carré dans φ (12). Si donc f est un carré, les deux polynômes φ et f ne diffèrent que par un facteur constant. Réciproquement tout facteur linéaire commun à f et φ appartient à f' et entre, par suite, dans f avec l'exposant 2 au moins. Donc *la condition nécessaire et suffisante pour que f soit un carré consiste en ce que f et φ ne diffèrent que par un facteur constant.*

Désignant par g un polynôme du second degré, supposons $f = g^2$; nous aurons

$$f = g^2, \quad f' = 2gg', \quad f'' = 2gg'' + 2g'^2,$$
$$\varphi = 4g^2(g'^2 - 2gg'') = -4f(gg).$$

En prenant les dérivées suivantes de f, et formant I, nous trouvons aussi

$$I = 4(g'^2 - 2gg'')^2 = 4(gg)^2.$$

De là deux expressions de la constante (gg); dans la première nous remplacerons le rapport constant des polynômes φ, f par celui de leurs dérivées quatrièmes :

$$(gg) = -\frac{1}{4}\frac{\varphi^{\text{v}}}{f^{\text{iv}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{I}}.$$

Il faut observer que $\sqrt{\text{I}}$ est ici entièrement déterminée.

D'après les égalités

$$f'' = 2gg'' + 2g'^2, \quad (gg) = 2gg'' - g'^2, \quad f^{\text{iv}} = 6g''^2,$$

on conclut

$$f'' + 2(gg) = 6gg'' = g\sqrt{6f^{\text{iv}}},$$

et *de là résulte cette expression de la racine carrée du polynôme f supposé carré parfait :*

$$(14) \quad g = \sqrt{f} = \frac{1}{\sqrt{6f^{\text{iv}}}}\left(f'' - \frac{\varphi^{\text{iv}}}{2f^{\text{iv}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6f^{\text{iv}}}}\left[f'' + \frac{(f''f'')}{f^{\text{iv}}}\right].$$

Cette forme algébrique de $\sqrt{f}$ nous sera utile plus loin ; elle se vérifie bien aisément *a posteriori* si l'on remplace φ^{iv} par son expression en fonction des coefficients de f. On trouve ainsi

$$\sqrt{f} = \frac{1}{\sqrt{a_0}}\left(a_0x^2 + 2a_1x + 3a_2 - \frac{2a_1^2}{a_0}\right),$$

et le carré de ce polynôme a, pour ses trois premiers termes, $a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2$.

VIII. — Décomposition d'un polynôme du quatrième degré en la différence de deux carrés.

Conservant les mêmes notations qu'au n° VI, introduisons encore le polynôme ψ, du sixième degré,

$$\psi = \varphi f' - f\varphi' = 3f'^3 - 6ff'f'' + 4f^2f'''.$$

La combinaison $3\psi^2 - \varphi^3$ fournit un polynôme du douzième degré, qui contient le facteur f^2. Faisant

$$3\psi^2 - \varphi^3 = 4\chi f^2,$$

on aura un nouveau polynôme χ du quatrième degré

$$\chi = 18 f'^3 f''' - 9 f'^2 f''^2 - 36 f f' f'' f''' + 12 f^2 f'''^2 + 16 f f''^3.$$

En y négligeant les termes contenant f, on voit de suite que $\chi + 3I\varphi$ contient le facteur f et ne diffère ainsi de f que par un coefficient constant. Pour connaître ce facteur, on peut donner à x une valeur particulière, celle d'une racine de f'', par exemple. Le facteur se réduit ainsi à $18 f'^2 f^{\text{IV}} + 12 f f'''^2$; c'est à quoi se réduit l'expression (13) de $2J$ pour $f'' = 0$. Donc

$$\chi + 3I\varphi = 2Jf$$

et, en conséquence,

(15) $$3\psi^2 = \varphi^3 - 12 I f^2 \varphi + 8 J f^3.$$

Considérons le polynôme du troisième degré

$$F = \xi^3 - 12 I \xi + 8 J,$$

obtenu en mettant ξ, au lieu de $\frac{\varphi}{f}$, dans le second membre de (15), et décomposons-le en facteurs linéaires d'après le résultat (11) du n° V.

Si nous posons

$$J^2 - 4 I^3 = D,$$

(16) $$a^3 = 4(J + \sqrt{D}), \quad b^3 = 4(J - \sqrt{D}),$$

et que nous choisissions la racine cubique de b^3 par la condition

(17) $$ab = 4I,$$

la décomposition de F donne pour résultat

$$F = (\xi + a + b)(\xi + \omega a + \omega^2 b)(\xi + \omega^2 a + \omega b).$$

En conséquence, la formule (15) donne celle-ci

$$(18)\quad \begin{cases} 3\psi^2 = [\varphi + (a+b)f] \\ \qquad \times [\varphi + (\omega a + \omega^2 b)f][\varphi + (\omega^2 a + \omega b)f]. \end{cases}$$

Les polynômes f et φ n'ayant aucun facteur commun en général, c'est-à-dire si f n'a pas de racine double, on voit que chacun des trois polynômes du second membre de (18) est un carré. Désignant par g, h deux polynômes du second degré, on aura donc

$$G = \varphi + (\omega a + \omega^2 b)f = g^2, \quad H = \varphi + (\omega^2 a + \omega b)f = h^2,$$
$$(19)\qquad (\omega - \omega^2)(a-b)f = g^2 - h^2.$$

Par cette dernière formule, f est réduit à la différence de deux carrés. Écrire explicitement les expressions de g, h, c'est ce qu'il reste à faire, et c'est à quoi va servir la formule (14) obtenue au n° VII.

Pour appliquer cette formule, il nous faut calculer deux constantes nouvelles $(\varphi''\varphi'')$ et $(\varphi''f'')$. Le calcul s'abrège si l'on suppose $f''=0$, ce qui est permis, et ce que nous rappellerons en employant le signe $\equiv$, au lieu du signe d'égalité,

$$\begin{aligned} (\varphi''\varphi'') &= 2\varphi''\varphi^{\text{iv}} - \varphi'''^2 \\ &\equiv -4f^{\text{iv}}(9f'^2f^{\text{iv}} + 6ff'''^2) + 4f'''^2(2ff^{\text{iv}} - 2f'f'''), \end{aligned}$$
$$(\varphi''\varphi'') \equiv -4Jf^{\text{iv}} + 2I\varphi^{\text{iv}},$$
$$(\varphi''f'') = \varphi''f^{\text{iv}} - \varphi'''f''' + \varphi^{\text{iv}}f'' \equiv -2f^{\text{iv}}(2ff^{\text{iv}} - 2f'f'''),$$
$$(\varphi''f'') \equiv -2If^{\text{iv}}.$$

En général, si p, q sont deux polynômes du second degré, et λ, μ des constantes, on a

$$(20)\quad (\lambda p + \mu q, \lambda p + \mu q) = \lambda^2(pp) + 2\lambda\mu(pq) + \mu^2(qq).$$

Appliquons cette formule en supposant $p = \varphi''$, $q = f''$, $\lambda = 1$; employons les expressions trouvées pour $(\varphi''\varphi'')$, $(\varphi''f'')$, et aussi $\varphi^{\text{iv}} = -2(f''f'')$, et nous obtiendrons

$$(G''G'') = \tfrac{1}{2}(4I - \mu^2)\varphi^{\text{iv}} - 4(J + \mu I)f^{\text{iv}},$$

la constante μ devant être remplacée par

$$\mu = \omega a + \omega^2 b.$$

On a, d'après (16) et (17),

$$4I - \mu^2 = -(\omega^2 a^2 + ab + \omega b^2),$$
$$8(J + \mu I) = a^3 + b^3 + 2ab(\omega a + \omega^2 b)$$
$$= (\omega^2 a^2 + ab + \omega b^2)(\omega a + \omega^2 b),$$
$$(G''G'') = -\tfrac{1}{2}(\omega^2 a^2 + ab + \omega b^2)[\varphi^{\text{IV}} + (\omega a + \omega^2 b)f^{\text{IV}}],$$

$$(21) \qquad \frac{(G''G'')}{G^{\text{IV}}} = -\frac{1}{2}(\omega^2 a^2 + ab + \omega b^2).$$

En échangeant ω et ω^2, on a la formule analogue pour H, et finalement, d'après (14),

$$(22) \left\{ \begin{aligned} g &= \frac{\varphi'' + (\omega a + \omega^2 b)f'' - \frac{1}{2}(\omega^2 a^2 + ab + \omega b^2)}{\sqrt{6[\varphi^{\text{IV}} + (\omega a + \omega^2 b)f^{\text{IV}}]}}, \\ h &= \frac{\varphi'' + (\omega^2 a + \omega b)f'' - \frac{1}{2}(\omega a^2 + ab + \omega^2 b^2)}{\sqrt{6[\varphi^{\text{IV}} + (\omega^2 a + \omega b)f^{\text{IV}}]}}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi sont exprimés explicitement les deux polynômes du second degré, dont la différence des carrés reproduit ufacteur constant près, suivant la formule (19).

IX. — Décomposition d'un polynôme du quatrième degré en facteurs linéaires.

Pour décomposer f en facteurs linéaires, il n'y a qu'à décomposer maintenant les polynômes du second degré $(g - h)$ et $(g + h)$.

En vue de ce calcul, cherchons l'expression de la constante $(\varphi\varphi)$. Supposant, comme précédemment, $f'' = 0$, nous avons

$$(\varphi\varphi) = 2\varphi\varphi^{\text{IV}} - 2\varphi'\varphi''' + \varphi''^2$$
$$= 16f'^2f'''^2 - 32ff'f'''f^{\text{IV}} + 16f^2f^{\text{IV}2}.$$
$$I^2 = 4f'^2f'''^2 - 8ff'f'''f^{\text{IV}} + 4f^2f^{\text{IV}2},$$
$$(\varphi\varphi) = 4I^2.$$

Écrivant, pour abréger,

$$G = \varphi + \mu f, \quad H = \varphi + \mu' f,$$

nous concluons

$$\begin{aligned}(GH) &= (\varphi\varphi) + (\mu + \mu')(\varphi f) + \mu\mu'(ff) \\ &= 4I^2 + (\mu + \mu')J + \mu\mu' I.\end{aligned}$$

Remplaçant encore les diverses quantités par leurs expressions en a, b, savoir :

$$\begin{aligned}4I &= ab, & 8J &= a^3 + b^3, \\ \mu &= \omega a + \omega^2 b, & \mu' &= \omega^2 a + \omega b,\end{aligned}$$

nous obtenons

$$(GH) = -\tfrac{1}{8}(\omega^2 a^2 + ab + \omega b^2)(\omega a^2 + ab + \omega^2 b^2).$$

D'après le n° VII et la formule (21), on a

$$(gg) = \frac{1}{2}\,\frac{(G'G'')}{G^{IV}} = -\frac{1}{4}(\omega^2 a^2 + ab + \omega b^2).$$

De même

$$(hh) = -\tfrac{1}{4}(\omega a^2 + ab + \omega^2 b^2).$$

On peut donc écrire

$$(GH) = -2(gg)(hh).$$

En général, pour deux polynômes quelconques du second degré g, h, on a identiquement, comme on le reconnait par un calcul direct,

$$(g^2 h^2) = 6(gh)^2 - 2(gg)(hh).$$

Comparée à la dernière égalité, celle-ci montre que, pour les polynômes particuliers envisagés ici, on a

$$(gh) = 0.$$

Par conséquent, la relation (20) donne simplement

$$(g - h, g - h) = (g + h, g + h) = (gg) + (hh) = \tfrac{1}{4}(a - b)^2.$$

et, d'après le n° I, en supposant $\varepsilon = \pm 1$,

$$2(g'' + \varepsilon h'')(g + \varepsilon h) = \left[g' + \varepsilon h' + \frac{i}{2}(a-b)\right]\left[g' + \varepsilon h' - \frac{i}{2}(a-b)\right].$$

Ainsi les quatre facteurs linéaires, dont le produit fait f, à une constante près, sont contenus dans la forme

$$g' \pm h' \pm \frac{i}{2}(a-b),$$

où les deux signes ambigus doivent être choisis d'une manière indépendante. Il suffit d'envisager le coefficient de x^4 dans le produit pour déterminer la constante, et l'on a cette formule finale

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{(a-b)^2}{12} f^{\text{IV}} f \\ & = \prod \left[\frac{\varphi''' + (\omega a + \omega^2 b) f'''}{\sqrt{6[\varphi^{\text{IV}} + (\omega a + \omega^2 b) f^{\text{IV}}]}} \right. \\ & \qquad \left. \pm \frac{\varphi''' + (\omega^2 a + \omega b) f'''}{\sqrt{6[\varphi^{\text{IV}} + (\omega^2 a + \omega b) f^{\text{IV}}]}} \pm \frac{i}{2}(a-b) \right]. \end{aligned} \right.$$

X. — Discussion de l'équation du quatrième degré à coefficients réels.

Supposons réels les coefficients de f, et examinons les facteurs linéaires de ce polynôme pour reconnaître la nature réelle ou imaginaire des racines.

Soient

$$\frac{\varphi''' + (\omega a + \omega^2 b) f'''}{\sqrt{6[\varphi^{\text{IV}} + (\omega a + \omega^2 b) f^{\text{IV}}]}} = u,$$

$$\frac{\varphi''' + (\omega^2 a + \omega b) f'''}{\sqrt{6[\varphi^{\text{IV}} + (\omega^2 a + \omega b) f^{\text{IV}}]}} = v.$$

Supposons d'abord a et b des quantités réelles. Alors u est imaginaire pour x réel, et l'une des déterminations de v est conjuguée de u. Soit v cette détermination. Alors

$u - v \pm \frac{i}{2}(a - b)$ est le produit de i par une quantité réelle, et deux facteurs donnent des racines réelles, tandis que les deux facteurs $u + v \pm \frac{i}{2}(a - b)$ donnent des racines imaginaires. D'après (16), on a cette conclusion :

Si $D = J^2 - 4I^3$ *est positif, l'équation* $f = 0$ *a deux racines réelles et deux imaginaires.*

Dans le cas opposé, celui où D est négatif, a et b, ωa et $\omega^2 b$, $\omega^2 a$ et ωb sont trois couples d'imaginaires conjuguées, en sorte que $a + b$, $\omega a + \omega^2 b$, $\omega^2 a + \omega b$ sont des quantités réelles, ainsi que $i(a - b)$ et les trois constantes

$$c_0 = \varphi^{\text{iv}} + (a + b)f^{\text{iv}},$$
$$c_1 = \varphi^{\text{iv}} + (\omega a + \omega^2 b)f^{\text{iv}},$$
$$c_2 = \varphi^{\text{iv}} + (\omega^2 a + \omega b)f^{\text{iv}}.$$

D'après (18), le produit de ces trois constantes est positif; c'est, à un facteur numérique près, le carré du coefficient de x^6 dans ψ. Ces constantes sont donc toutes trois positives, ou bien deux négatives et une positive. Dans le premier cas, chaque facteur linéaire de (23) donne une racine réelle; dans le second, une racine imaginaire. La distinction des deux cas se fait par le moyen des deux fonctions symétriques

$$c_0 + c_1 + c_2 = 3\varphi^{\text{iv}},$$
$$c_0 c_1 + c_1 c_2 + c_2 c_0 = 3[(\varphi^{\text{iv}})^2 - 4I(f^{\text{iv}})^2],$$

et l'on a cette conclusion :

Si $D = J^2 - 4I^3$ *est négatif, les quatre racines de* f *sont réelles quand les deux quantités*

$$\varphi^{\text{iv}} \quad \text{et} \quad (\varphi^{\text{iv}})^2 - 4I(f^{\text{iv}})^2$$

sont positives; les quatre racines sont imaginaires dans les autres cas.

Ce dernier *criterium* peut être présenté sous une forme différente, qui résulte des deux égalités

$$\varphi^{\text{IV}}[(\varphi^{\text{IV}})^2 - 4\text{I}(f^{\text{IV}})^2] - 8(f^{\text{IV}})^2[\text{I}\varphi^{\text{IV}} - \text{J}f^{\text{IV}}] = \tfrac{2}{25}(\psi^{\text{VI}})^2,$$

$$\text{I}^2[(\varphi^{\text{IV}})^2 - 4\text{I}(f^{\text{IV}})^2] - (\text{I}\varphi^{\text{IV}} - \text{J}f^{\text{IV}})(\text{I}\varphi^{\text{IV}} + \text{J}f^{\text{IV}})$$
$$= (\text{J}^2 - 4\text{I}^3)(f^{\text{IV}})^2.$$

La première, conséquence de (15), montre que $(\varphi^{\text{IV}})^2 - 4\text{I}(f^{\text{IV}})^2$ est positif si φ^{IV} et $\text{I}\varphi^{\text{IV}} - \text{J}f^{\text{IV}}$ sont positifs. La seconde, à cause de la supposition $\text{J}^2 - 4\text{I}^3 < 0$, montre que, si $(\varphi^{\text{IV}})^2 - 4\text{I}(f^{\text{IV}})^2$ est positif, $\text{I}\varphi^{\text{IV}} - \text{J}f^{\text{IV}}$ et $\text{I}\varphi^{\text{IV}} + \text{J}f^{\text{IV}}$ ont un même signe. Ce signe est + si φ^{IV} et I sont positifs. Donc *les deux inégalités*

$$(24) \qquad \varphi^{\text{IV}} > 0, \quad \text{I}\varphi^{\text{IV}} - \text{J}f^{\text{IV}} > 0$$

sont entièrement équivalentes à

$$\varphi^{\text{IV}} > 0, \quad (\varphi^{\text{IV}})^2 - 4\text{I}(f^{\text{IV}})^2 > 0$$

dans le cas supposé $\text{J}^2 - 4\text{I}^3 < 0$.

C'est aux inégalités (24) que conduirait l'application directe du théorème de Sturm.

Rappelons, avec les expressions de I, J (n° VI), celle de φ^{IV}, savoir

$$\varphi^{\text{IV}} = 2^7.3^2(a_1^2 - a_0 a_2),$$

d'après laquelle on a

$$\frac{1}{2^{10}.3^3}[(\varphi^{\text{IV}})^2 - 4\text{I}(f^{\text{IV}})^2]$$
$$= 12(a_1^2 - a_0 a_2)^2 - a_0^2(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2).$$

Si $\text{D} = \text{J}^2 - 4\text{I}^3$ *est nul, f a une racine double,* comme on l'a déjà vu (n° VI). Prenant $a = b = \sqrt[3]{4\text{J}} = \pm 2\sqrt{\text{I}}$, on a, par la formule (23), le facteur double sous la forme $\varphi''' - af'''$. Ce facteur peut être triple. Il devient illusoire quand φ et f sont proportionnels : ce cas, où f est un carré, a été examiné au n° VII.

SUR UNE ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES MÊLÉES;

PAR M. E. CESARO.

1. En partant d'une fonction arbitraire $y=f(x)$, l'équation

$$y_p\,dx = x\,dy_{p-1},$$

dont un cas particulier a été considéré par M. Catalan, fournit, de proche en proche, la série de fonctions

$$y_1 = xy', \quad y_2 = xy' + x^2y'', \quad y_3 = xy' + 3x^2y'' + x^3y''',$$
$$y_4 = xy' + 7x^2y'' + 6x^3y''' + x^4y^{\text{IV}}, \quad \ldots.$$

On est conduit à poser

$$(1) \qquad y_p = \lambda_{1,p}xy' + \lambda_{2,p}x^2y'' + \lambda_{3,p}x^3y''' + \ldots,$$

en prenant $\lambda_{m,p}=0$, lorsque m *est supérieur à* p ou *inférieur à* 1.

2. Puisque les valeurs des nombres λ sont *indépendantes de la nature de la fonction* y, faisons, pour les déterminer, $y=x^m$. Il est clair que

$$y^{(p)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)x^{m-p}, \quad y_p = m^p x^m.$$

Si l'on pose

$$\delta_m = 1.2.3\ldots m\,\lambda_{m,p}, \quad u_m = m^p,$$

la relation (1) prend la forme *symbolique*

$$(\delta+1)^m = u^m,$$

et l'on en déduit immédiatement

$$\delta_m = (u-1)^m = \Delta^m(u_0).$$

c'est-à-dire

$$\lambda_{m,p} = \frac{\Delta^m(0^p)}{1.2.3\ldots m}.$$

Par suite, la formule (1) devient

$$(2)\quad y_p = \frac{xy'}{1}\Delta(0^p) + \frac{x^2y''}{1.2}\Delta^2(0^p) + \frac{x^3y'''}{1.2.3}\Delta^3(0^p) + \ldots.$$

3. Pour *invertir* la dernière relation, il est évident que l'on peut poser

$$(3)\qquad x^p y^{(p)} = \mu_{1,p} y_1 + \mu_{2,p} y_2 + \mu_{3,p} y_3 + \ldots,$$

les nombres μ, analogues aux nombres λ, étant, comme ceux-ci, *indépendants de la nature de* y. Pour $y = x^m$, la formule (3) devient

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1) = \mu_{1,p} m + \mu_{2,p} m^2 + \mu_{3,p} m^3 + \ldots.$$

Comme cette égalité doit être vérifiée *identiquement*, on voit que $(-1)^{p-r}\mu_{r,p}$ est la *somme des produits* $p-r$ *à* $p-r$ *des* $p-1$ *premiers nombres entiers.* Conséquemment, la relation (3) prend la forme *symbolique*

$$(4)\qquad x^p y^{(p)} = y(y-1)(y-2)\ldots(y-p+1).$$

4. Soit, par exemple, $y = x + x^2 + \ldots + x^n$; puis, faisons $x = 1$. Il est visible que

$$y^{(p)} = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p+1},$$
$$y_p = s_p = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p.$$

Par suite, l'égalité (2) devient

$$s_p = C_{n+1,2}\Delta(0^p) + C_{n+1,3}\Delta^2(0^p) + C_{n+1,4}\Delta^3(0^p) + \ldots.$$

Si B_p est le $p^{\text{ième}}$ *nombre de Bernoulli,* c'est-à-dire le *coefficient de n dans* s_p, la dernière relation donne im-

médiatement

$$B_p = \frac{1}{1.2}\Delta(0^p) - \frac{1}{2.3}\Delta^2(0^p) + \frac{1}{3.4}\Delta^3(0^p) - \ldots.$$

Ces égalités sont fort connues.

5. De même, la formule (4) donne lieu à l'identité symbolique

$$\begin{aligned} & s(s-1)(s-2)\ldots(s-p+1) \\ & = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p+1}. \end{aligned}$$

En considérant, dans les deux membres, les seuls coefficients de n, on obtient l'égalité *connue*

$$B(B-1)(B-2)\ldots(B-p+1) = \frac{(-1)^{p+1}}{p+1}1.2.3\ldots(p-1).$$

6. Dans le Mémoire *Sur une suite de polynômes entiers,* M. Catalan a considéré le cas particulier de n infini, en laissant x quelconque. Alors, à cause de

$$y^{(p)} = \frac{1.2.3\ldots p}{(1-x)^{p+1}},$$

la formule (2) devient

$$\begin{aligned} & 1 + 2^p x + 3^p x^2 + 4^p x^3 + \ldots \\ & = \frac{\Delta(0^p)}{(1-x)^2} + \frac{x\Delta^2(0^p)}{(1-x)^3} + \frac{x^2\Delta^3(0^p)}{(1-x)^4} + \ldots. \end{aligned}$$

La série du premier membre est donc égale au quotient d'un polynôme entier, de degré $p-1$, par $(1-x)^{p+1}$. Cette propriété a été mise en évidence, par M. Catalan, dans le Mémoire cité.

7. Un cas plus remarquable est celui de $y = e^x$. On

trouve, d'après (2), pour $x=1$,

$$\frac{1^p}{1}+\frac{2^p}{1.2}+\frac{3^p}{1.2.3}+\frac{4^p}{1.2.3.4}+\ldots=N_p e,$$

pourvu que l'on pose

$$N_p=\frac{\Delta(0^p)}{1}+\frac{\Delta^2(0)^p}{1.2}+\frac{\Delta^3(0^p)}{1.2.3}+\ldots.$$

On voit que N_p est un nombre entier, et, par suite, *la série considérée est égale à un certain nombre de fois le nombre e*. Cette propriété, énoncée par M. Dobinski, a été démontrée dans le tome IV de la *Nouvelle Correspondance mathématique*.

8. Les nombres N étant particulièrement importants, nous allons en dire quelques mots. On reconnaît sans difficulté qu'ils obéissent à la loi symbolique

(5) $$(N+1)^p=N^{p+1},$$

qui donne, de proche en proche, pour les termes de la série $N_1, N_2, N_3, \ldots$, les valeurs

(6) $$1,\ 2,\ 5,\ 15,\ 52,\ 203,\ 877,\ 4140,\ \ldots.$$

Si l'on pose $N_{p+1}=\nu_p$, on sait que l'égalité (5) donne lieu à l'égalité symbolique générale

$$F(N+1)=F(\nu).$$

Par exemple, pour $F(z)=(z-1)^p$, on trouve

$$N_p=(\nu-1)^p=N(N-1)^p=\Delta^p(N_1).$$

Ainsi, *le $p^{ième}$ terme de la série* (6) *est égal à la $p^{ième}$ différence du premier terme.*

9. Prenons encore $F(z)=e^{xz}$; il vient

$$e^{(N+1)x}=e^{\nu x},$$

c'est-à-dire

$$e^x e^{Nx} = (e^{Nx})',$$

d'où

$$e^{e^x-1} = 1 + N_1 \frac{x}{1} + N_2 \frac{x^2}{1.2} + N_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

D'après cela,

$$N_p = \left(\frac{d^p e^{e^x-1}}{dx^p}\right)_{x=0}.$$

10. Enfin, faisons remarquer la relation symbolique

$$N(N-1)(N-2)\ldots(N-p+1) = 1,$$

que l'on déduit immédiatement de (4).

11. Signalons, pour finir, l'expression de y_p sous forme d'intégrale définie. Moyennant l'égalité connue

$$\frac{\Delta^m(0^p)}{1.2.3\ldots p} \equiv -\frac{2i}{\pi}\int_0^\pi (e^{\cos\theta + i\sin\theta} - 1)^m \sin p\theta\, d\theta,$$

la formule (2) donne

$$\frac{y_p}{1.2.3\ldots p} \equiv -\frac{2i}{\pi}\int_0^\pi f(x e^{\cos\theta + i\sin\theta}) \sin p\theta\, d\theta,$$

pourvu que l'on néglige la partie imaginaire du second membre. C'est pour exprimer cette restriction que nous avons remplacé par $\equiv$ le signe d'égalité. Par exemple, la dernière formule donne, pour les nombres N, cette expression générale

$$N_p \equiv -\frac{2i}{\pi e}\int_0^\pi e^{e^{e^{i\theta}}} \sin p\theta\, d\theta,$$

c'est-à-dire

$$N_p = \frac{2}{\pi e}\int_0^\pi e^{e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)} \sin[e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)] \sin p\theta\, d\theta.$$

DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE FONCTIONS;

PAR M. E. CESARO.

1. *Fonctions de e^x.* — Soit, avant tout, $y = \varphi(e^x)$. Si l'on calcule, de proche en proche, y', y'', y''', ..., on est conduit à poser

$$y^{(p)} = \delta_{1,p}\frac{\varphi'(e^x)}{1}e^x + \delta_{2,p}\frac{\varphi''(e^x)}{1.2}e^{2x} + \delta_{3,p}\frac{\varphi'''(e^x)}{1.2.3}e^{3x} + \ldots,$$

les nombres δ, *indépendants de la nature de y*, étant nuls lorsque le premier indice est supérieur au second, ou inférieur à l'unité. Pour $\varphi(x) = x^m$, la dernière relation devient

$$(\delta + 1)^m = m^p,$$

pourvu que l'on remplace δ^r par $\delta_{r,p}$. Il en résulte immédiatement

$$\delta_{m,p} = \Delta^m(0^p),$$

puis

$$(1)\quad \begin{cases} y^{(p)} = \dfrac{\varphi'(e^x)}{1}e^x\Delta(0^p) \\ \qquad + \dfrac{\varphi''(e^x)}{1.2}e^{2x}\Delta^2(0^p) + \dfrac{\varphi'''(e^x)}{1.2.3}e^{3x}\Delta^3(0^p) + \ldots. \end{cases}$$

2. Il est aisé d'*invertir* la formule (1), en opérant comme nous l'avons fait dans notre article *Sur une équation aux différences mêlées*. On trouve l'égalité *symbolique*

$$(2)\qquad e^{px}\varphi^{(p)}(e^x) = y(y-1)(y-2)\ldots(y-p+1).$$

3. *Applications.* — Dans le tome VI de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, M. Leinekugel a démontré la formule (1) pour l'appliquer au développe-

ment de $\frac{1}{1-ae^x}$, suivant les puissances de x. Si l'on prend $\varphi(x) = \frac{1}{1-ax}$, la formule (1) donne, pour $x = 0$,

$$y^{(p)} = \frac{a\Delta(0^p)}{(1-a)^2} + \frac{a^2\Delta^2(0^p)}{(1-a)^3} + \frac{a^3\Delta^3(0^p)}{(1-a)^4} + \dots$$

Tel est le coefficient de $\frac{x^p}{1.2.3\dots p}$, dans le développement de $\frac{1}{1-ae^x}$.

4. De même, pour $\varphi(x) = (x-1)^m$, on voit que $y^{(p)}(1)$, généralement nul, est égal à $m!$ lorsque $p = m$. D'après (1), on a donc, pour $x = 0$,

$$y^{(p)} = \Delta^m(0^p).$$

Il en résulte

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} (e^x - 1)^m = \frac{x^m}{m!}\Delta^m(0^m) &+ \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}\Delta^m(0^{m+1}) \\ &+ \frac{x^{m+2}}{(m+2)!}\Delta^m(0^{m+2}) + \dots \end{aligned} \right.$$

5. Inversement, d'après (2), l'*expression symbolique*

$$\Delta(\Delta-1)(\Delta-2)\dots(\Delta-p+1),$$

dans laquelle on remplace Δ^r par $\Delta^m(0^r)$, est nulle si m est différent de p.

6. Voici une autre application des formules (1) et (2). Prenons $\varphi(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. On trouve sans peine

$$\frac{\varphi^{(p)}(1)}{1.2.3\dots p} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{p-1} \sin(p-1)\frac{\pi}{4}.$$

D'autre part, on sait que, E_p étant le $p^{\text{ième}}$ *nombre*

d'Euler, on a

$$y = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = 1 + E_1 \frac{x}{1} + E_2 \frac{x^2}{1.2} + E_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Cela posé, la relation (1) fournit cette remarquable formule

$$\begin{aligned} E_p = &- \frac{1}{4}[2\Delta^2(0^p) \;-2\Delta^3(0^p) \;+\Delta^4(0^p)] \\ &+ \frac{1}{4^2}[2\Delta^6(0^p) \;-2\Delta^7(0^p) \;+\Delta^8(0^p)] \\ &- \frac{1}{4^3}[2\Delta^{10}(0^p) - 2\Delta^{11}(0^p) + \Delta^{12}(0^p)] + \ldots, \end{aligned}$$

que l'on peut mettre sous la forme *symbolique*

$$E_p = -\frac{\Delta^2}{2 + 2\Delta + \Delta^2},$$

en convenant de remplacer, après développement, Δ^m par $\Delta^m(0^p)$. Par exemple,

$$\begin{aligned} E_{10} = &-(511 - 27\,990 + 204\,630) \\ &+ (2054430) - 3704400 + 1890000) - 113400 = - 50521. \end{aligned}$$

7. Inversement, d'après (2), on peut écrire l'égalité *symbolique*

$$\begin{aligned} &E(E-1)(E-2)\ldots(E-p+1) \\ &\quad = (-1)^{p-1}\frac{1.2.3\ldots p}{(\sqrt{2})^{p-1}}\sin(p-1)\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

8. *Intégrales définies.* — Multiplions les deux membres de l'égalité (3) par $\sin p\omega\, d\omega$, après avoir fait $x = e^{i\omega}$, et intégrons entre 0 et π, *en négligeant*, dans le second membre, la *partie réelle*. Pour rappeler cela, nous remplacerons par $\equiv$ le signe d'égalité. Il vient

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi (e^{e^{i\omega}} - 1)^m \sin p\omega\, d\omega \\ &\equiv i\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\Delta^m(0^{m+\nu})}{(m+\nu)!}\int_0^\pi \sin(m+\nu)\omega \sin p\omega\, d\omega = i\frac{\pi}{2}\,\frac{\Delta^m(0^p)}{p!}, \end{aligned}$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{\Delta^m(o^p)}{1.2.3\ldots p} = -\frac{2i}{\pi}\int_0^\pi (e^{\cos\omega + i\sin\omega} - 1)^m \sin p\omega \, d\omega.$$

Par substitution dans (1), on obtient, plus généralement,

$$\frac{y^{(p)}}{1.2.3\ldots p} = -\frac{2i}{\pi}\int_0^\pi \varphi(e^{x+\cos\omega+i\sin\omega}) \sin p\omega \, d\omega.$$

Par exemple, pour $\varphi(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ et $x = 0$, on trouve

$$E_p = -\frac{4}{\pi} 1.2.3\ldots p \int_0^\pi \frac{(e^{\cos\omega} - e^{-\cos\omega}) \sin(\sin\omega)\sin p\omega}{e^{2\cos\omega} + e^{-2\cos\omega} + 2\cos(2\sin\omega)} d\omega.$$

9. *Fonctions de* $\log x$. — Soit encore $y = \varphi(\log x)$. En opérant comme ci-dessus, on trouve la formule *symbolique*

$$(5) \qquad x^p y^{(p)} = \varphi(\varphi - 1)(\varphi - 2)\ldots(\varphi - p + 1),$$

où l'on doit remplacer, après développement, φ^r par $\varphi^{(r)}(\log x)$. Inversement

$$\varphi^{(p)}(\log x) = \frac{xy'}{1}\Delta(o^p) + \frac{x^2y''}{1.2}\Delta^2(o^p) + \frac{x^3y'''}{1.2.3}\Delta^3(o^p) + \ldots.$$

10. *Intégrales définies*. — En employant (4) et en remplaçant $\log x$ par x, la dernière formule devient

$$\frac{\varphi^{(p)}(x)}{1.2.3\ldots p} = -\frac{2i}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x + e^{i\omega}) \sin p\omega \, d\omega.$$

Cette formule, *à peu près évidente,* a de nombreuses conséquences.

11. *Cas général*. — Au lieu de nous arrêter à l'examen d'autres cas particuliers, considérons, en général,

$$y = \varphi(u), \quad u = \psi(x).$$

Pour cela, il faut que nous démontrions quelques propriétés d'un important algorithme. Rappelons d'abord que, ayant toutes les solutions *entières* et *positives* de l'équation

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_m = p,$$

on appelle *algorithme isobarique* d'une fonction $f(r)$, et l'on désigne par $\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}} f(r)$, *la somme de tous les produits analogues à*

$$f(r_1) f(r_2) f(r_3) \ldots f(r_m).$$

Or c'est l'algorithme

$$\mathrm{U}_{p,m}(x) = \overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}} \left(\frac{u^{(r)}}{1.2.3\ldots r} \right),$$

que nous voulons considérer d'une manière spéciale.

12. *Propriété fondamentale.* — Pour plus de simplicité, désignons par ε_r la fonction soumise au signe algorithmique. Prenons un terme

$$\varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} \varepsilon_{r_3} \ldots \varepsilon_{r_m} \quad (r_1 + r_2 + \ldots + r_m = p)$$

de $\mathrm{U}_{p,m}(x)$. A cause de $\varepsilon'_r = (r+1)\varepsilon_{r+1}$, il est clair que sa dérivée est

$$(6) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=m} (r_\nu + 1) \varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} \ldots \varepsilon_{r_{\nu-1}} \varepsilon_{r_\nu + 1} \varepsilon_{r_{\nu+1}} \ldots \varepsilon_{r_m}.$$

Pour que l'un de ces termes coïncide avec *un terme donné*

$$(7) \qquad \varepsilon_{\rho_1} \varepsilon_{\rho_2} \varepsilon_{\rho_3} \ldots \varepsilon_{\rho_m} \quad (\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_m = p + 1)$$

de $\mathrm{U}_{p+1,m}(x)$, il faut que

$$r_1 = \rho_1, \;\ldots,\; r_{\nu-1} = \rho_{\nu-1},\; r_\nu = \rho_\nu - 1,\; r_{\nu+1} = \rho_{\nu+1},\; \ldots,\; r_m = \rho_m,$$

et, par conséquent, ρ_ν doit être *supérieur à l'unité.* Si cela a lieu, le terme (7) se trouve ρ_ν fois dans $U'_{p,m}(x)$, comme on le voit par (6). Il en résulte que le terme (7) est contenu dans $U'_{p,m}(x)$ un nombre de fois égal à la *somme des quantités* ρ *supérieures à l'unité,* c'est-à-dire $p+1-N$ fois, N étant le *nombre des quantités* ρ *égales à l'unité.* D'autre part, considérons les termes

$$\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\varepsilon_{r_3}\ldots\varepsilon_{r_{m-1}} \quad (r_1+r_2+\ldots+r_{m-1}=p)$$

de $U_{p,m-1}(x)$, et multiplions par ε_1 chacun d'eux, en écrivant ce facteur aux m places qu'il peut occuper, de la manière suivante:

$$\varepsilon_1\varepsilon_{r_1}\ldots\varepsilon_{r_{m-1}},\quad \varepsilon_{r_1}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{r_{m-1}},\quad \ldots\ldots\quad \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\ldots\varepsilon_1.$$

Dans le Tableau ainsi formé, le terme (7) se trouve N fois, tandis que la somme de tous les termes est, évidemment, $m\varepsilon_1 U_{p,m-1}(x)$. En résumé, le terme (7) est contenu $p+1$ fois dans $U'_{p,m}(x)+m\varepsilon_1 U_{p,m-1}(x)$. Conséquemment

$$(8)\qquad U'_{p,m}(x)=(p+1)U_{p+1,m}(x)-mu'U_{p,m-1}(x).$$

Pour que cette relation subsiste sans limitations, nous conviendrons de supposer $U_{p,m}=0$, lorsque m est supérieur à p ou inférieur à 1.

13. *Formule générale.* — Revenons à la fonction y, et démontrons que

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{y^{(p)}}{1.2.3\ldots p} &= \frac{\varphi'(u)}{1}U_{p,1}(x)\\ &\quad+\frac{\varphi''(u)}{1.2}U_{p,2}(x)+\frac{\varphi'''(u)}{1.2.3}U_{p,3}(x)+\ldots,\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{p!}\frac{d^p y}{dx^p}=\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left[\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu y}{du^\nu}\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{\nu}\left(\frac{1}{r!}\frac{d^r u}{dx^r}\right)\right].$$

Admettons, pour un instant, que cette formule, évidente pour $p=1$, soit vraie pour les valeurs 1, 2, 3, ..., p de p, et démontrons qu'elle subsiste pour la valeur $p+1$. Pour atteindre ce but, il suffit de prendre les dérivées des deux membres et d'avoir égard à la relation fondamentale (8). On doit observer que *cette démonstration ne suppose aucunement que les fonctions considérées soient développables par la formule de Taylor.*

14. *Exemple.* — Soient $u=\frac{1}{x}$ et, par suite,

$$\varepsilon_r = \frac{(-1)^r}{x^{r+1}}.$$

Un terme quelconque de $U_{p,m}$ est

$$\frac{(-1)^{r_1}}{x^{r_1+1}}\,\frac{(-1)^{r_2}}{x^{r_2+1}}\cdots\frac{(-1)^{r_m}}{x^{r_m+1}} = \frac{(-1)^p}{x^{p+m}}.$$

Tous les termes de $U_{p,m}$ sont donc égaux : leur nombre est, d'ailleurs, celui des solutions *entières* et *positives* de l'équation $r_1+r_2+\ldots+r_m=p$, c'est-à-dire $C_{p-1,m-1}$. Conséquemment

$$U_{p,m}(x) = \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}\left[\frac{(-1)^r}{x^{r+1}}\right] = (-1)^p\frac{C_{p-1,m-1}}{x^{p+m}}.$$

La relation (9) devient

$$(-1)^p\frac{x^p y^{(p)}}{1.2.3\ldots p} = \frac{\varphi'\left(\frac{1}{x}\right)}{x} + \frac{C_{p-1,1}}{1.2}\,\frac{\varphi''\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} + \frac{C_{p-1,2}}{1.2.3}\,\frac{\varphi'''\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3} + \ldots.$$

Telle est la formule qui donne la $p^{\text{ième}}$ *dérivée des fonctions de* $\frac{1}{x}$.

15. Lorsque l'expression de la $p^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction de fonction est connue, la comparaison avec les formules précédentes donne lieu à des égalités isobariques, plus ou moins intéressantes. Ainsi, pour $u = e^x$, on a

$$U_{p,m}(x) = \overset{m}{\underset{p}{S}}\left(\frac{e^x}{1.2.3\ldots r}\right) = e^{mx}\overset{m}{\underset{p}{S}}\left(\frac{1}{1.2.3\ldots r}\right).$$

La comparaison des formules (1) et (9) donne, pour les différences de 0^p, cette intéressante expression isobarique

$$\frac{\Delta^m(0^p)}{p!} = \overset{m}{\underset{p}{S}}\left(\frac{1}{r!}\right).$$

De même, pour $u = \log x$, on a

$$U_{p,m}(x) = \overset{m}{\underset{p}{S}}\left[\frac{(-1)^{r+1}}{r x^r}\right] = \frac{(-1)^{p+m}}{x^p}\overset{m}{\underset{v}{S}}\left(\frac{1}{r}\right).$$

La comparaison des formules (5) et (9) montre, ensuite, que *la somme des produits ν à ν des $p-1$ premiers nombres entiers est égale à*

$$p(p-1)(p-2)\ldots(p-\nu+1)\overset{p-\nu}{\underset{p}{S}}\left(\frac{1}{r}\right).$$

D'après cela, on a

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left[\frac{\alpha^\nu}{\nu!}\overset{\nu}{\underset{p}{S}}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}{1.2\ldots p}.$$

En particulier, pour $\alpha = 1$, on retrouve une formule donnée par Cauchy dans ses *Exercices*.

16. La relation (9) comprend comme cas très particuliers, pour différentes formes de la fonction φ, *toutes*

les formules contenues dans notre article *Algorithme isobarique*, et démontrées, par une autre voie, dans le *Journal de Battaglini*. Par exemple, pour

$$\varphi(x) = \frac{1}{x},$$

il vient

$$\frac{y^{(p)}}{1.2.3\ldots p} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} [(-1)^\nu y^{\nu+1} U_{p,\nu}(x)].$$

En particulier, pour $u = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et $x = 0$,

$$\frac{E_{2p}}{1.2.3\ldots 2p} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left[(-1)^\nu \overset{\nu}{\underset{p}{S}}\left(\frac{1}{1.2.3\ldots 2r}\right)\right].$$

Pour $u = \frac{1}{x}(1 - e^{-x})$ et $x = 0$,

$$\frac{B_p}{1.2.3\ldots p} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{(-1)^{\nu+p} \overset{\nu}{\underset{p}{S}}\left[\frac{1}{1.2.3\ldots(r+1)}\right]\right\}.$$

Telles sont les expressions isobariques des *nombres d'Euler et de Bernoulli*.

17. Autre exemple, bien remarquable. En faisant successivement $\varphi(x) = e^x$, $\varphi(x) = \log x$, et $x = 0$ dans la formule (9), on obtient

$$\frac{y^{(p)}}{p!} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left[\frac{1}{\nu!} \overset{\nu}{\underset{p}{S}}\left(\frac{u^{(r)}}{r!}\right)\right],$$

$$\frac{u^{(p)}}{p!} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left[\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} \overset{\nu}{\underset{p}{S}}\left(\frac{y^{(r)}}{r!}\right)\right].$$

Cela posé, désignons respectivement par s_r, c_r les sommes des $r^{\text{ièmes}}$ *puissances* et des *produits* r *à* r de

quantités quelconques $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Soit

$$y = (1 + \alpha x)(1 + \beta x)(1 + \gamma x)\ldots = e^u.$$

Il est clair que, pour $x = 0$,

$$\frac{y^{(r)}}{r!} = c_r, \quad \frac{u^{(r)}}{r!} = \frac{s_r}{r}.$$

Les formules précédentes deviennent donc

$$c_p = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left[\frac{(-1)^{p+\nu}}{\nu!} \mathop{\mathrm{S}}_p^{\nu} \left(\frac{s_r}{r} \right) \right],$$

$$s_p = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left[(-1)^{p+\nu} \frac{p}{\nu} \mathop{\mathrm{S}}_p^{\nu} (c_r) \right].$$

18. *Interprétation de l'algorithme* U. — Soit a la valeur de u, pour $x = \xi$. Si l'on fait $\varphi(x) = (x - a)^m$, et $x = \xi$, la formule (9) devient

$$\frac{y^{(p)}}{1.2.3\ldots p} = \mathrm{U}_{p,m}(\xi).$$

Par conséquent, entre les limites d'application du théorème de Taylor à la fonction $u = \psi(x)$, on pourra écrire

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} [\psi(x) - \psi(\xi)]^m = (x - \xi)^m\, &\mathrm{U}_{m,m}(\xi) \\ + (x - \xi)^{m+1}\, &\mathrm{U}_{m+1,m}(\xi) \\ + (x - \xi)^{m+2}\, &\mathrm{U}_{m+2,m}(\xi) + \ldots. \end{aligned} \right.$$

La formule (3) se trouve ainsi généralisée.

19. *Intégrales définies.* — Multiplions les deux membres de (10) par $\sin p\omega\, d\omega$, après avoir fait

$$x - \xi = e^{i\omega}$$

et remplacé ξ par x. Intégrons ensuite entre 0 et π, en négligeant, dans le second membre, la partie réelle.

Il vient

$$\int_0^\pi [\psi(x+e^{i\omega})-\psi(x)]^m \sin p\omega\, d\omega$$

$$= i\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} U_{m+\nu,m}(x)\int_0^\pi \sin(m+\nu)\omega \sin p\omega\, d\omega = i\frac{\pi}{2}U_{p,m}(x)$$

d'où

$$(11)\quad U_{p,m}(x) = -\frac{2i}{\pi}\int_0^\pi [\psi(x+e^{i\omega})-\psi(x)]^m \sin p\omega\, d\omega.$$

20. *Algorithme isobarique de* $\frac{1}{r+1}$. — La fonction dont nous avons parlé dans notre article *Propriétés d'une fonction arithmétique* n'est autre que l'algorithme

$$\sigma_{p,m} = \mathop{\mathrm{S}}_p^m \left(\frac{1}{r+1}\right),$$

que l'on rencontre dans la dérivation des fonctions de $u = \frac{1}{x}\log(1+x)$. En effet, pour cette forme de u, on a

$$U_{p,m}(0) = \mathop{\mathrm{S}}_p^m \left[\frac{(-1)^r}{r+1}\right] = (-1)^p \sigma_{p,m}.$$

Par conséquent, en vertu de (9),

$$(-1)^p \frac{y^{(p)}}{1.2.3\ldots p} = \frac{\varphi'(1)}{1}\sigma_{p,1} + \frac{\varphi''(1)}{1.2}\sigma_{p,2} + \frac{\varphi'''(1)}{1.2.3}\sigma_{p,3} + \ldots.$$

Par exemple, pour $\varphi(x) = e^x$, on obtient le développement

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu\left(\frac{\sigma_{\nu,1}}{1} + \frac{\sigma_{\nu,2}}{1.2} + \frac{\sigma_{\nu,3}}{1.2.3} + \ldots\right)x^\nu,$$

donné dans l'article cité.

21. *Algorithmes* V *et* W. — Nous ajouterons quelques mots sur deux autres importants algorithmes, à savoir

$$V_{p.m}(x) = \overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}[u^{(r)}], \quad W_{p.m}(x) = \overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left[\frac{u^{(r)}}{1.2.3\ldots(r-1)}\right].$$

Dans cette Note, c'est le dernier algorithme qui attirera spécialement notre attention. Quant au premier, nous nous bornerons à faire remarquer la relation fondamentale

$$V'_{p,m}(x) = m[V_{p+1,m}(x) - V_{p,m-1}(x)],$$

que l'on obtient par des considérations fort simples, analogues à celles qui nous ont servi à établir l'égalité (8). C'est de la même manière que l'on obtient la relation

$$(12) \qquad W'_{p,m}(x) = (p-m+1)\,W_{p+1,m}(x).$$

Il suffit d'observer que, si l'on continue à représenter par ε_r la fonction soumise au signe algorithmique, on a $\varepsilon'_r = r\varepsilon_{r+1}$, et, par suite, le terme (7) se trouve, dans $W'_{p,m}(x)$, un nombre de fois égal à la *somme des quantités* ρ *supérieures à l'unité,* diminuée du *nombre des mêmes quantités,* c'est-à-dire à

$$(p+1-N)-(m-N) = p-m+1.$$

22. La formule (12) permet de développer $W_{p,m}(x)$ suivant les puissances ascendantes de x, lorsqu'un tel développement est possible. En effet, il est évident que

$$(13) \quad W^{(k)}_{p,m}(x) = (p-m+1)(p-m+2)\ldots(p-m+k)\,W_{p+k,m}(x).$$

Par suite, s'il est permis de poser

$$W_{p,m}(x) = A^{(p)}_{0,m} + A^{(p)}_{1,m}\frac{x}{1} + A^{(p)}_{2,m}\frac{x^2}{1.2} + A^{(p)}_{3,m}\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

on a nécessairement

$$A_{k,m}^{(p)} = (p-m+1)(p-m+2)\ldots(p-m+k)\,A_{0,m}^{(p+k)}.$$

Il en résulte la formule *symbolique*

$$W_{p,m}(x) = \frac{A_{0,m}^{(p)}}{(1-A_{0,m}x)^{p-m+1}}.$$

En d'autres termes,

$$\underset{p}{\overset{m}{\mathrm{S}}}\left[\frac{\psi^{(r)}(x)}{(r-1)!}\right] = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\left\{C_{p-m+\nu,\nu}\,x^{\nu}\underset{p+\nu}{\overset{m}{\mathrm{S}}}\left[\frac{\psi^{(r)}(0)}{(r-1)!}\right]\right\}.$$

23. Pour montrer toute l'utilité de ces formules, commençons par appliquer la formule (13) à la détermination de l'algorithme

$$\tau_{p,m} = \underset{p}{\overset{m}{\mathrm{S}}}\left[\frac{1}{(r-1)!}\right].$$

Pour $u = e^x$, il est clair que

$$W_{p,m}(x) = \underset{p}{\overset{m}{\mathrm{S}}}\left[\frac{e^x}{(r-1)!}\right] = e^{mx}\tau_{p,m}.$$

Par conséquent, en vertu de (13),

$$m^k\tau_{p,m} = (p-m+1)(p-m+2)\ldots(p-m+k)\,\tau_{p+k,m}.$$

On en déduit facilement

$$\tau_{p,m} = \frac{m^{p-m}}{1.2.3\ldots(p-m)}.$$

24. De même, soit

$$\theta_{p,m} = \underset{p}{\overset{m}{\mathrm{S}}}\left[\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{\alpha}{r-1}\right)\right].$$

Pour $u = \frac{1}{x^\alpha}$, on a

$$W_{p,m}(x) = (-1)^p \frac{\alpha^m}{x^{m\alpha+p}} \theta_{p,m}:$$

puis, la formule (13) donne

$$\theta_{p,m} = C_{p+m\alpha-1,\,p}\ m.$$

C'est là un résultat curieux au point de vue de la partition des nombres. Si l'on considère toutes les solutions, *entières* et *positives*, de l'équation

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_m = p,$$

on trouve d'abord, pour $\alpha = 0$, que leur nombre est $C_{p-1,\,m-1}$. On voit ensuite, pour $\alpha = 1$, que l'on a

$$\Sigma r_1 r_2 \ldots r_m = C_{m+p-1,2m-1}, \quad \text{etc.}$$

25. Ces résultats trouvent, en outre, une application utile dans la recherche des dérivées des fonctions de fonctions. Ainsi, pour $u = xe^x$ et $x = 0$, la formule (9) donne, en tenant compte de la valeur de l'algorithme τ,

$$y^{(p)} = C_{p,1}\, 1^{p-1} \varphi'(0) + C_{p,2}\, 2^{p-2} \varphi''(0) + C_{p,3}\, 3^{p-3} \varphi'''(0) + \ldots.$$

De même, par l'algorithme θ, on obtient, en supposant $u = \frac{x}{(1-x)^{\alpha+1}}$ et $x = 0$,

$$\frac{y^{(p)}}{1.2.3\ldots p} = C_{p+\alpha-1,\,p-1} \frac{\varphi'(0)}{1} + C_{p+2\alpha-1,\,p-2} \frac{\varphi''(0)}{1.2} + C_{p+3\alpha-1,\,p-3} \frac{\varphi'''(0)}{1.2.3} + \ldots;$$

....

26. Pour finir, nous ferons observer que chacun de ces algorithmes peut être mis sous forme d'intégrale définie, moyennant la formule (11), pourvu que le développement (10) soit légitime. Ainsi, en cherchant à

exprimer l'algorithme τ, on trouve

$$\int_0^{\pi} e^{m\cos\omega}\sin(m\omega + m\sin\omega)\sin p\omega\, d\omega = \frac{\pi}{2}\,\frac{m^{p-m}}{1.2.3\ldots(p-m)}.$$

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Questions de Géométrie descriptive (Mathématiques spéciales), à l'usage des candidats à l'École Polytechnique et à l'École centrale des Arts et Manufactures; par M. *E. Jurisch,* agrégé de l'Université, professeur de Mathématiques spéciales à l'École Colbert. Paris, Ch. Delagrave; 1883. In-8, avec 66 planches hors texte. Prix : 9fr,50.

Cet Ouvrage contient les solutions de soixante problèmes empruntés, pour la plupart, aux questions proposées dans les concours d'admission à l'École Polytechnique et à l'Ecole Centrale.

Ces problèmes sont accompagnés de données numériques permettant de disposer l'épure sur la feuille et facilitant ainsi la confection du portefeuille exigé des candidats aux Écoles.

L'auteur a donné les diverses méthodes qui peuvent être employées pour résoudre un même problème, afin que son Ouvrage pût servir de complément à tous les cours de Géométrie descriptive.

En outre, il a cru utile, s'adressant à des élèves de Mathématiques spéciales, d'appliquer les équations des surfaces toutes les fois que la mise en équation a pu fournir la nature des projections de l'intersection cherchée (nos 3, 21, 23, 24, 42, 46, 55, 62) ou un procédé pour construire les tangentes aux points remarquables (nos 21, 23, 24, 55, 62).

Enfin, il a étudié complètement la détermination des asymptotes des projections (nos 1 à 12, 40) et celle des points doubles (nos 1, 2, 12, 13, 18, 28, 29, 36, 39), ces questions ayant été fréquemment posées, dans ces dernières années, aux examens oraux de l'École Polytechnique.

NÉCROLOGIE.

Nous avons le regret d'annoncer à nos lecteurs la mort de M. Lionnet, ancien professeur de Mathématiques au lycée Louis-le-Grand, ancien examinateur de la Marine, qui a enrichi les *Nouvelles Annales* d'articles aussi remarquables par leur élégance que par leur variété. Nul plus que nous ne sentira la perte d'un collaborateur aussi précieux.

QUESTIONS.

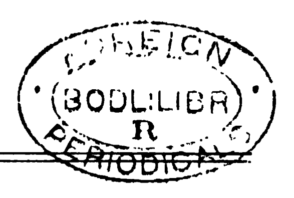
1520. Si du point O on voit le côté BC du triangle ABC sous un angle égal à A augmenté de 90°, on a entre les côtés a, b, c du triangle et les distances α, β, γ du point O aux sommets A, B, C la relation

$$a^2\alpha^2 = b^2\beta^2 + c^2\gamma^2.$$ (D'Ocagne.)

1521. Le point M étant pris d'une manière quelconque sur le côté BC du triangle ABC, on projette orthogonalement en B', C' les sommets B, C sur AM; démontrer qu'on a la relation

$$BC.AM = MB.AC' + MC.AB'.$$ (D'Ocagne.)

1522. Le déterminant de $(n-1)^2$ éléments, dont l'élément général u_{ij} est égal au *nombre des diviseurs communs de* $i+1$, $j+1$, représente la *totalité des entiers, non supérieurs à* n, *dépourvus de diviseurs carrés, autres que l'unité.* (E. Cesaro.)



SUR UNE IDENTITÉ TRIGONOMÉTRIQUE;

PAR M. HERMITE.

M. J.-W.-L. Glaisher, professeur à Cambridge, a donné sans démonstration la relation suivante, où a, b, c, f, g, h sont des quantités quelconques, à savoir (¹) :

$$\begin{aligned}&\frac{\sin(a-f)\sin(a-g)\sin(a-h)}{\sin(a-b)\sin(a-c)}\\&+\frac{\sin(b-f)\sin(b-g)\sin(b-h)}{\sin(b-a)\sin(b-c)}\\&+\frac{\sin(c-f)\sin(c-g)\sin(c-h)}{\sin(c-a)\sin(c-b)}\\&+\frac{\sin(f-a)\sin(f-b)\sin(f-c)}{\sin(f-g)\sin(f-h)}\\&+\frac{\sin(g-a)\sin(g-b)\sin(g-c)}{\sin(g-f)\sin(g-h)}\\&+\frac{\sin(h-a)\sin(h-b)\sin(h-c)}{\sin(h-f)\sin(h-g)}=0.\end{aligned}$$

L'éminent géomètre a de plus remarqué que la somme des trois premiers termes est égale à

$$\sin(a+b+c-f-g-h);$$

or, on voit qu'en changeant a, b, c en f, g, h, et réciproquement, le sinus se reproduit sauf le signe; il suffit donc d'ajouter les deux expressions pour obtenir immédiatement la relation annoncée. Ce résultat intéressant peut se généraliser et se démontrer comme il suit.

Considérons la fonction

$$f(x)=\frac{\sin(x-f)\sin(x-g)\ldots\sin(x-s)}{\sin(x-a)\sin(x-b)\ldots\sin(x-l)},$$

(¹) Association française pour l'avancement des Sciences, Congrès de Reims, séance du 17 août 1880.

où je suppose que les facteurs soient en même nombre au numérateur et au dénominateur. Désignons par A, B, ..., L les résidus correspondant aux pôles $x = a$, b, ..., l, de sorte qu'on ait

$$A = \frac{\sin(a-f)\sin(a-g)\ldots\sin(a-s)}{\sin(a-b)\sin(a-c)\ldots\sin(a-l)},$$
$$B = \frac{\sin(b-f)\sin(b-g)\ldots\sin(b-s)}{\sin(b-a)\sin(b-c)\ldots\sin(b-l)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

J'emploierai la relation

$$A + B + \ldots + L = \frac{H - G}{2i},$$

où G et H désignent les valeurs de $f(x)$, lorsque, ayant fait $z = e^{ix}$, on suppose z nul et infini (*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, p. 328).

Ces valeurs s'obtiennent facilement; on a, en effet,

$$\frac{\sin(x-f)}{\sin(x-a)} = \frac{z^2 e^{-if} - e^{if}}{z^2 e^{-ia} - e^{ia}};$$

d'où, pour $z = 0$ et z infini, les quantités

$$e^{i(f-a)} \text{ et } e^{-i(f-a)}.$$

Soit donc, pour un moment,

$$u = a + b + \ldots + l,$$
$$v = f + g + \ldots + s;$$

nous aurons sur-le-champ

$$G = e^{-i(u-v)}, \quad H = e^{i(u-v)},$$

et par suite

$$A + B + \ldots + L = \sin(u - v).$$

Maintenant il suffit de permuter a et f, b et g, ..., l et s pour obtenir l'équation de M. Glaisher. Qu'on désigne en effet par F, G, ..., S ce que deviennent alors les quantités A, B, ..., L; la relation précédente

donne

$$F + G + \ldots + S = -\sin(u - v),$$

et l'on en conclut l'identité

$$A + B + \ldots + L + F + G + \ldots + S = 0.$$

NOTES SUR LE CALCUL ISOBARIQUE;

Par M. E. CESARO.

I. — Algorithmes d'algorithmes.

1. Sur un algorithme de *poids variable* r, de *degré constant* μ, répétons l'opération algorithmique $\overset{m}{\underset{p}{S}}$. Un terme quelconque du résultat

$$\overset{\mu}{\underset{r_1}{S}}\overset{\mu}{\underset{r_2}{S}}\overset{\mu}{\underset{r_3}{S}}\cdots\overset{\mu}{\underset{r_m}{S}}, \quad (r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_m = p)$$

se compose d'une série de termes, dont chacun est constitué par μm facteurs dont les indices ont pour somme $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = p$. Tout terme du résultat appartient donc à $\overset{\mu m}{\underset{p}{S}}$. Il est évident, d'ailleurs, que *tous* les termes de $\overset{\mu m}{\underset{p}{S}}$ se trouvent, sans répétition, dans le résultat. Par l'emploi successif de ce raisonnement, on est autorisé à écrire

$$(1) \qquad \overset{m}{\underset{p}{S}}\overset{\mu}{\underset{r}{S}}\overset{\mu'}{\underset{r}{S}}\overset{\mu''}{\underset{r}{S}}\cdots = \overset{m\mu\mu'\mu''\cdots}{\underset{p}{S}},$$

en convenant d'opérer *successivement* et *de droite à*

gauche. En outre, on doit rappeler que, par convention,

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}} = 0 \text{ lorsqu'on n'a pas } 1 \overline{\overline{<}} m \overline{\overline{<}} p.$$

2. En particulier, soit u une fonction quelconque de x, et considérons l'algorithme

$$U_{p,m}(x) = \overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}} \left(\frac{1}{r!} \frac{d^r u}{dx^r} \right),$$

étudié dans la Note *Dérivées des fonctions de fonctions*. On aura, en vertu de (1),

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}} (U_{r,\mu}) = U_{p,\mu m}.$$

Cette égalité permet de *généraliser* les expressions isobariques obtenues dans la Note citée. Ainsi nous avons trouvé

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}} \left(\frac{1}{r!} \right) = \frac{\Delta^m (0^p)}{p!}.$$

Nous aurons, plus généralement,

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}} \left[\frac{\Delta^\mu (0^r)}{r!} \right] = \frac{\Delta^{\mu m} (0^p)}{p!}.$$

Par exemple, pour $\mu = 2$,

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}} \left(\frac{2^r - 2}{r!} \right) = \frac{\Delta^{2m} (0^p)}{p!}.$$

3. De même, les égalités

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}} \left[\frac{1}{(r-1)!} \right] = \frac{m^{p-m}}{(p-m)!}, \quad \overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}} (C_{\alpha+r-1,\, r-1}) = C_{m\alpha+p-1,\, p-m}$$

donnent

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left[\frac{1}{(r-\mu)!}\right]=\frac{m^{p-\mu m}}{(p-\mu m)!},\quad \overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}(\mathrm{C}_{\mu\alpha+r-1\ r-\mu})=\mathrm{C}_{\mu m\alpha+p-1\ p-\mu m}.$$

4. Comme dernier exemple, l'égalité

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{s_{p-m,\,p-1}}{(m+1)(m+2)\ldots p},$$

dans laquelle $s_{m,p}$ représente la *somme des produits m à m des p premiers nombres entiers,* se généralise ainsi

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left[\frac{s_{r-\mu,\,r-1}}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots r}\right]=\frac{s_{p-\mu m,\,p-1}}{(\mu m+1)(\mu m+2)\ldots p}.$$

En particulier, pour $\mu=2$, on a

$$\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left[\frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{r-1}\right)\right]=\frac{1}{2^m}\,\frac{s_{p-2m,\,p-1}}{(2m+1)(2m+2)\ldots p};$$

....

II. — Sur la dérivation des fonctions de fonctions.

5. Dans la même Note, nous avons montré que, si $y=\varphi(u)$, $u=\psi(x)$, on a

$$(2)\qquad \frac{y^{(p)}}{1.2.3\ldots p}=\sum_{i=1}^{i=p}\left[\frac{\varphi^{(i)}(u)}{1.2.3\ldots i}\,\mathrm{U}_{p,i}(x)\right].$$

Cette formule s'étend aisément au cas où y s'exprime en fonction de x, par l'intermédiaire d'un nombre *quelconque* de fonctions. Soit, par exemple,

$$y=\chi(u),\quad u=\varphi(v),\quad v=\psi(x),$$

et posons

$$\overset{m}{\underset{p}{S}}\left[\frac{\varphi^{(r)}}{r!}\right] = \overset{m}{\underset{p}{S}}\left(\frac{1}{r!}\,\frac{d^r u}{dv^r}\right) = \Phi_{p,m},$$

$$\overset{m}{\underset{p}{S}}\left[\frac{\psi^{(r)}}{r!}\right] = \overset{m}{\underset{p}{S}}\left(\frac{1}{r!}\,\frac{d^r v}{dx^r}\right) = \Psi_{p,m}.$$

Il est visible que

$$\frac{y^{(p)}}{p!} = \sum_{i=1}^{i=p}\left[\frac{\chi^{(i)}}{i!}\left(\Phi_{i,i}\Psi_{p,i} + \Phi_{i+1,i}\Psi_{p,i+1} + \Phi_{i+2,i}\Psi_{p,i+2} + \ldots + \Phi_{p,i}\Psi_{p,p}\right)\right].$$

Cette relation nous sera fort utile dans d'autres recherches.

6. Ici, nous n'aurons besoin que de la formule (2), dans le cas particulier de $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Soit

$$u = 1 - c_1 x + c_2 x^2 - c_3 x^3 + \ldots = \frac{1}{1 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 - \gamma_3 x^3} + \ldots.$$

D'après (2), on a

$$(3)\qquad \gamma_p = \overset{p}{\underset{p}{S}}(c_r) - \overset{p-1}{\underset{p}{S}}(c_r) + \overset{p-2}{\underset{p}{S}}(c_r) - \ldots \pm \overset{1}{\underset{p}{S}}(c_r).$$

7. Supposons que

$$u = (1 - a_1 x)(1 - a_2 x)(1 - a_3 x)\ldots.$$

La formule (3) donne l'expression générale des coefficients γ, moyennant les *sommes* c_r *des produits* r *à* r des quantités a. Il est, parfois, utile de connaître l'expression des mêmes coefficients en fonction des *sommes* s_r *des* $r^{\text{ièmes}}$ *puissances* des mêmes quantités. Dans ce but, posons $\frac{1}{u} = e^v$, de sorte que

$$v = s_1 x + \frac{s_2}{2} x^2 + \frac{s_3}{3} x^3 + \ldots.$$

Dans le cas actuel, la formule (2) donne, pour $\varphi(x) = e^x$,

$$(4)\quad \gamma_p = \overset{1}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{s_r}{r}\right) + \frac{1}{2!}\overset{2}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{r}{s_r}\right) + \frac{1}{3!}\overset{3}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{s_r}{r}\right) + \ldots + \frac{1}{p!}\overset{p}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{s_r}{r}\right).$$

Les relations (3) et (4), qui nous seront utiles dans la suite, fournissent de nombreux théorèmes.

III. — Différences des fonctions.

8. On sait que

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^p = \sum_{i=0}^{i=\infty}\left[\overset{p}{\underset{p+i}{\mathrm{S}}}\left(\frac{1}{r!}\frac{d^r y}{dx^r}\right)\Delta x^i\right].$$

Or, il est évident que l'on peut écrire, plus généralement,

$$(5)\qquad \left(\frac{\Delta^m y}{\Delta x^m}\right)^p = \sum_{i=0}^{i=\infty}\left[\overset{p}{\underset{p+i}{\mathrm{S}}}\left(\frac{1}{r!}\frac{d^r}{dx^r}\frac{\Delta^{m-1} y}{\Delta x^{m-1}}\right)\Delta x^i\right].$$

Cette formule donne lieu à beaucoup d'égalités intéressantes; mais il est utile, pour l'appliquer, de connaître l'expression de $\Delta^m y$. La question est aisée à résoudre, et, d'ailleurs, le résultat est connu; mais, comme nous en aurons besoin ultérieurement, dans la recherche des *différences des fonctions de fonctions*, nous allons l'indiquer en quelques mots.

9. Par le théorème de Taylor, on a

$$\Delta y = \frac{y'}{1}\Delta x + \frac{y''}{1.2}\Delta x^2 + \frac{y'''}{1.2.3}\Delta x^3 + \ldots.$$

En partant de là, calculons, de proche en proche, Δ^2_y, Δ^3_y, ... Nous sommes conduits à poser

$$\Delta^m y = \frac{y^{(m)}}{m!}\delta_{0,m}\Delta x^m + \frac{y^{(m+1)}}{(m+1)!}\delta_{1,m}\Delta x^{m+1} + \frac{y^{(m+2)}}{(m+2)!}\delta_{2,m}\Delta x^{m+2} + \ldots,$$

les nombres δ étant *indépendants de la nature de* y. Pour les déterminer, faisons $y = x^{m+i}$, puis $x = 0$, $\Delta x = 1$. Il vient

$$\Delta^m (0^{m+i}) = \delta_{i,m}.$$

Conséquemment

$$(6) \qquad \frac{\Delta^m y}{\Delta x^m} = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{y^{(m+i)}}{(m+i)!} \Delta^m (0^{m+i}) \Delta x^i.$$

10. Soit, par exemple, $y = e^x$, et posons $\Delta x = z$. La dernière formule devient

$$(7) \qquad \left(\frac{e^z - 1}{z}\right)^m = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\Delta^m (0^{m+i})}{(m+i)!} z^i.$$

Par la comparaison de cette égalité avec (6), on voit que l'on peut toujours écrire *symboliquement*

$$\Delta^m y = (e^{y\Delta x} - 1)^m.$$

11. De même, pour $y = \sin x$, on trouve, en faisant $x = 0$, $\Delta x = z$,

$$(m \text{ pair}) \qquad 2^m \sin^m \frac{z}{2} \sin \frac{mz}{2} = \sum_{i=0}^{i=\infty} (-1)^i \frac{\Delta^m (0^{m+2i+1})}{(m+2i+1)!} z^{m+2i+1},$$

$$(m \text{ impair}) \qquad 2^m \sin^m \frac{z}{2} \cos \frac{mz}{2} = \sum_{i=0}^{i=\infty} (-1)^i \frac{\Delta^m (0^{m+2i})}{(m+2i)!} z^{m+2i};$$

tandis que la formule (5) donne

$$(8) \quad (m \text{ pair}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(2 \sin \frac{z}{2} \cos \frac{mz}{2}\right)^p \\ &= \sum_{i=0}^{i=\infty} \left\{ z^{p+i} \mathop{\mathrm{S}}_{p+i}^{p} \left[\frac{\cos \frac{(r-1)\pi + (m-1)z}{2}}{r!} \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

$$(9) \quad (m \text{ impair}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(2 \sin \frac{z}{2} \sin \frac{mz}{2}\right)^p \\ &= \sum_{i=0}^{i=\infty} \left\{ z^{p+i} \mathop{\mathrm{S}}_{p+i}^{p} \left[\frac{\sin \frac{(r-1)\pi + (m-1)z}{2}}{r!} \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

12. Revenons à la fonction $y = x^{\varpi}$, et employons la formule (6), en supposant $\Delta x = 1$. On obtient, sous forme *symbolique*,

$$\Delta^m(x^{\varpi}) = [x + \Delta^m(0)]^{\varpi},$$

en convenant de remplacer la $i^{\text{ième}}$ puissance de $\Delta^m(0)$ par $\Delta^m(0^i)$. Si l'on introduit ce résultat, presque évident, dans la formule (5), on trouve, pour $x = 0$,

$$[\Delta^m(0^{\varpi})]^p = \sum_i \left\{ \overset{p}{\underset{p+i}{\mathrm{S}}} [C_{\varpi,r}\, \Delta^{m-1}(0^{\varpi-r})] \right\}.$$

Par exemple, pour $m = 2$,

$$(2^{\varpi} - 2)^p = \overset{p}{\underset{p}{\mathrm{S}}}(C_{\varpi,r}) + \overset{p}{\underset{p+1}{\mathrm{S}}}(C_{\varpi,r}) + \overset{p}{\underset{p+2}{\mathrm{S}}}(C_{\varpi,r}) + \ldots,$$

....

13. Dernière application : pour $y = \frac{1}{x}$ et $\Delta x = -xz$, la formule (6) devient

$$(10) \qquad \frac{1.2.3\ldots m}{(1-z)(1-2z)\ldots(1-mz)} = \sum_{i=0}^{=\infty} \Delta^m(0^{m+i})\, z^i.$$

Conséquemment, en vertu des formules (3) et (4),

$$\frac{\Delta^m(0^{m+p})}{m!} = \sum_{i=1}^{i=p} \left[(-1)^{p+i} \overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}}(s_{r,m}) \right]$$
$$= \sum_{i=1}^{i=p} \left[\frac{1}{i!} \overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}} \left(\frac{1^r + 2^r + \ldots + m^r}{r} \right) \right].$$

IV. — Algorithmes isobariques composés.

14. Nous appelons ainsi toute combinaison linéaire d'algorithmes *isobariques* élémentaires d'une même fonc-

tion, quelles que soient, d'ailleurs, leurs *degrés*. On a vu, précédemment, que ces algorithmes composés interviennent dans l'expression des dérivées des fonctions de fonctions : nous les rencontrerons dans un grand nombre d'autres questions.

15. On sait que plusieurs géomètres ont imaginé des algorithmes, propres à *réglementer*, pour ainsi dire, l'*Analyse partitive*, cette importante et féconde branche de l'Algèbre, que M. Sylvester appelle, avec beaucoup de raison, l'*âme* de toute l'Analyse. Or il est curieux de constater que tous les inventeurs, en agissant les uns à l'insu des autres, ont été d'accord dans le choix de l'algorithme isobarique *composé* comme base du calcul des partitions. Nous montrerons, en effet, qu'un tel algorithme ne diffère pas de celui qui a été étudié l'année dernière par M. d'Ocagne dans les *Nouvelles Annales*. On sait, d'ailleurs, que le même algorithme, précédemment étudié par Wronski, sous le nom de *fonction aleph*, a été l'objet de recherches de beaucoup de géomètres. Ici, nous voulons seulement signaler à l'attention des jeunes inventeurs les travaux, injustement méconnus, de plusieurs savants professeurs de l'Université de Naples : MM. Trudi, Fergola, Torelli, etc., qui ont publié, à différentes reprises, dans le *Journal de Battaglini* et ailleurs, d'intéressantes Notes sur l'algorithme en question. De plus, on trouve dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Naples* quelques importants Mémoires de M. Trudi sur le même sujet. Ils sont surtout à recommander pour les renseignements bibliographiques et les Notices historiques, nombreuses et intéressantes.

16. Les mathématiciens, avons-nous dit, ont tâché de

prendre comme base de l'Analyse partitive l'algorithme isobarique *composé,* c'est-à-dire *une somme d'algorithmes simples,* de *même poids,* mais de *degrés différents.* L'algorithme-élément semble être resté inconnu jusqu'à présent; mais c'est évidemment cet *algorithme élémentaire* $\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}$ qu'il faut, désormais, considérer comme *élément primordial* dans le calcul des partitions : ce sont ses propriétés que l'on doit rechercher et étudier, afin qu'elles constituent le fondement de l'Analyse partitive; car cet algorithme est le seul qui possède la propriété d'être à la fois *isobarique* et *homogène,* et de ne pas souffrir une ultérieure décomposition en éléments d'une plus grande simplicité.

17. M. d'Ocagne représente par $[a_1 a_2 a_3 \ldots a_m]^{(p)}$ le résultat que l'on obtient en remplaçant par l'unité les coefficients numériques, dans le développement de $(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m)^p$. Tout en nous conformant à cette notation, nous écrirons, plus brièvement, $[a_\nu]_m^p$. M. d'Ocagne donne ensuite la formule

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x)\ldots(1-a_mx)} \\ &\quad = 1 + [a_\nu]_m^1 x + [a_\nu]_m^2 x^2 + [a_\nu]_m^3 x^3 + \ldots. \end{aligned} \right.$$

En vertu des égalités (3) et (4), on voit que l'algorithme $[a_\nu]_m^p$ est *composé* et *isobarique;* car il peut être mis sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$(12)\quad [a_\nu]_m^p = \sum_{i=1}^{i=p} \left[(-1)^{p+i} \overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}}(c_r) \right] = \sum_{i=1}^{i=p} \left[\frac{1}{i!} \overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{s_r}{r}\right) \right].$$

Naturellement, les sommes c_r doivent être considérées comme *nulles,* lorsque r surpasse m.

18. Si $a_\nu = \nu$, l'examen simultané des formules (10) et (11) montre que

$$[\nu]_m^p = \frac{\Delta^m(0^{m+p})}{1.2.3\ldots m}.$$

Cette formule, qui sera généralisée plus loin, a été remarquée par M. d'Ocagne, qui l'a obtenue par comparaison avec une formule donnée par M. Schlömilch, dans un Mémoire *Sur les facultés analytiques*.

19. Faisons remarquer aussi l'expression des *nombres d'Euler* sous forme d'algorithme composé isobarique :

$$(-1)^p \frac{E_{2p}}{1.2.3\ldots 2p} = \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^p \left[\frac{1}{(2\nu-1)^2}\right]_\infty^p.$$

On y arrive immédiatement par la décomposition de la fonction $\cos x$ en ses facteurs primaires, et le développement connu de $\operatorname{séc} x$. L'emploi de la fonction $\frac{\sin x}{x}$ conduit, au contraire, à la représentation des *nombres de Bernoulli*, moyennant l'algorithme $\left[\frac{1}{\nu^2}\right]_\infty^p$.

20. Désignons, pour abréger, par $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m)$ le premier membre de (11), et imaginons que l'élément a_i augmente de Δa_i. On trouve aisément cette égalité

$$\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_m) = (a_1, a_2, \ldots, a_m, a_i + \Delta a_i)\, x\, \Delta a_i,$$

contenue dans les *Mémoires* de M. Trudi. En égalant, dans les deux membres, les coefficients de x^p, on obtient

$$(13) \qquad \frac{\partial}{\partial a_i}[a_1 a_2 \ldots a_m]^p = [a_1 a_2 \ldots a_m a_i]^{p-1}.$$

Par conséquent, en suivant la marche indiquée par M. Torelli dans sa Note *Sulle funzioni simmetriche, complete e semplici*, on a

$$\frac{d}{dx}[\Omega]^p = [\Omega, x + a_1]^{p-1} + [\Omega, x + a_2]^{p-1} + \ldots + [\Omega, x + a_m]^{p-1}.$$

pourvu que, pour abréger, on représente par Ω l'ensemble des éléments $x+a_1, x+a_2, \ldots, x+a_m$. Or il est évident que tout terme

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (x+a_1)^{\rho_1}(x+a_2)^{\rho_2}\ldots(x+a_m)^{\rho_m} \\ (\Sigma\rho = p-1, \quad \rho_i = 0, 1, 2, \ldots) \end{array} \right.$$

du second membre est un terme de $[\Omega]^{p-1}$. D'autre part, il est clair que le terme (14), considéré comme *un terme donné* de $[\Omega]^{p-1}$, se trouve ρ_i+1 fois dans $[\Omega, x+a_i]^{p-1}$, et, par suite, $p+m-1$ fois dans la dérivée de $[\Omega]^p$. Il en résulte cette importante formule

$$(15) \qquad \frac{d}{dx}[\Omega]^p = (p+m-1)[\Omega]^{p-1}.$$

Par dérivations successives, on trouve, plus généralement,

$$\frac{1}{i!}\frac{d^i}{dx^i}[x+a_\nu]_m^p = C_{p+m-1,i}[x+a_\nu]_m^{p-i}.$$

Conséquemment, par le théorème de Maclaurin,

$$(16) \qquad \left\{ \begin{array}{l} [x+a_\nu]_m^p = [a_\nu]_m^p + C_{p+m-1,1}[a_\nu]_m^{p-1}x \\ \qquad\qquad + C_{p+m-1,2}[a_\nu]_m^{p-2}x^2 + \ldots. \end{array} \right.$$

21. Faisons, par exemple, $a_\nu = \nu$. On obtient

$$m![x+\nu]_m^p = \Delta^m(0^{m+p}) + C_{p+m-1,1}x\,\Delta^m(0^{m+p-1}) + C_{p+m-1,2}x^2\Delta^m(0^{m+p-2}) + \ldots.$$

Si l'on observe que $\Delta^m(0^p) = m\Delta^{m-1}(1^{p-1})$, la dernière formule prend la forme symbolique

$$(m-1)![x+\nu]_m^p = [x+\Delta^{m-1}(1)]^{p+m-1} = \Delta^{m-1}[(x+1)^{p+m-1}].$$

Par le changement de m en $m+1$ et de $x+1$ en x, on en déduit la formule

$$[x, x+1, x+2, \ldots, x+m]^p = \frac{\Delta^m(x^{m+p})}{1.2.3\ldots m},$$

due à M. Fergola.

22. La formule (13) se démontre plus aisément en observant, avec M. d'Ocagne, que

$$[a_\nu]_m^p = [a_\nu]_{m-1}^p + a_m [a_\nu]_m^{p-1},$$

a_m pouvant, du reste, être considéré comme un *quelconque* des éléments a. De cette identité, appliquée plusieurs fois de suite, on déduit

$$(17)\quad [a_\nu]_m^p = [a_\nu]_{m-1}^p + a_m [a_\nu]_{m-1}^{p-1} + a_m^2 [a_\nu]_{m-1}^{p-2} + \ldots.$$

La dérivation de la même égalité donne

$$\frac{\partial}{\partial a_i}[a_\nu]_m^p = [a_\nu]_m^{p-1} + a_i \frac{\partial}{\partial a_i}[a_\nu]_m^{p-1};$$

puis, par applications successives,

$$(18)\quad \frac{\partial}{\partial a_i}[a_\nu]_m^p = [a_\nu]_m^{p-1} + a_i [a_\nu]_m^{p-2} + a_i^2 [a_\nu]_m^{p-3} + \ldots.$$

Il suffit, maintenant, d'avoir égard à la relation (17) pour obtenir immédiatement (13).

23. Il y a, d'ailleurs, une formule facile à établir qui rend presque *intuitive* la relation (16). En effet, dans sa Note *Sur un algorithme algébrique,* M. d'Ocagne a démontré que, si l'on pose

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_m),$$

on a

$$[a_\nu]_m^p = \sum \frac{a^{p+m-1}}{f'(a)}.$$

Si chacune des quantités a croît de x, la fonction $f(z)$ devient $f(z - x)$, et la dernière formule donne

$$[x + a_\nu]_m^p = \sum \frac{(x + a)^{p+m-1}}{f'(a)}.$$

On voit immédiatement que le coefficient de x^i, dans le développement du second membre, est

$$C_{p+m-1,i}[a_\nu]_m^{p-i}.$$

24. Si l'on pose

$$g(z) = (1 - a_1 z)(1 - a_2 z)\ldots,$$

la formule de M. d'Ocagne peut prendre la forme

$$[a_\nu]_m^p = -\sum \frac{a^{p+1}}{g'\left(\frac{1}{a}\right)},$$

plus utile au point de vue des applications, surtout dans le cas de m infini. Par exemple, pour $a_\nu = \frac{1}{(2\nu - 1)^2}$, on a

$$g(z) = \cos \frac{\pi\sqrt{z}}{2},$$

et l'on trouve

$$\left[\frac{1}{(2\nu - 1)^2}\right]_\infty^p = 4\left(1 - \frac{1}{3^{2p+1}} + \frac{1}{5^{2p+1}} - \ldots\right).$$

25. Dans (18), faisons varier i de 1 à m, et additionnons. D'après (15), la somme des premiers membres est

$$(p + m - 1)[a_\nu]_m^{p-1}.$$

Si l'on change p en $p + 1$, on trouve donc

$$(19)\quad p[a_\nu]_m^p = s_1[a_\nu]_m^{p-1} + s_2[a_\nu]_m^{p-2} + s_3[a_\nu]_m^{p-3} + \ldots.$$

C'est là une identité remarquable, que l'on peut rapprocher de celle-ci :

$$(20)\quad [a_\nu]_m^p = c_1[a_\nu]_m^{p-1} - c_2[a_\nu]_m^{p-2} + c_3[a_\nu]_m^{p-3} - \ldots,$$

point de départ de l'étude de M. d'Ocagne *Sur les séries récurrentes*. Pour en montrer une application, observons que, en vertu d'une célèbre formule d'Euler,

$$[q^\nu]_\infty^p = \frac{q^p}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^p)}.$$

La relation (19) devient

$$p = \frac{1-q^p}{1-q} + \frac{(1-q^p)(1-q^{p-1})}{1-q^2}$$
$$+ \frac{(1-q^p)(1-q^{p-1})(1-q^{p-2})}{1-q^3} + \ldots.$$

26. Les formules que nous avons données, ailleurs, pour la *résolution des récurrences,* permettent de déduire des égalités (19) et (20) les relations isobariques

$$c_p = \sum_{i=1}^{i=p} \left((-1)^{p+i} \underset{p}{\overset{i}{\mathrm{S}}} \left\{ [a_\nu]_m^r \right\} \right),$$
$$s_p = \sum_{i=1}^{i=p} \left((-1)^{i-1} \frac{p}{i} \underset{p}{\overset{i}{\mathrm{S}}} \left\{ [a_\nu]_m^r \right\} \right),$$

qui *intervertissent,* pour ainsi dire, les formules (12). En particulier, pour m infini et $a_\nu = q^\nu$, toutes ces relations acquièrent de l'intérêt. Par exemple, si, pour abréger, on pose

$$Q_i = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^i)},$$

on obtient

$$q^{\frac{p^2}{2}} Q_p = \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ (-1)^{p+i} \underset{p}{\overset{i}{\mathrm{S}}} \left[q^{\frac{r}{2}} Q_r \right] \right\},$$
$$q^{\frac{p}{2}} Q_p = \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ (-1)^{p+i} \underset{p}{\overset{i}{\mathrm{S}}} \left[q^{\frac{r^2}{2}} Q_r \right] \right\}.$$

V. — ALGORITHMES HOMOGÈNES COMPOSÉS.

27. Nous venons de rencontrer des algorithmes composés, isobariques, mais non homogènes. Il en est d'autres qui sont *homogènes,* sans être *isobariques,* et nous allons les voir paraître dans une importante question, à savoir le *développement, suivant les puissances*

de x, de l'algorithme élémentaire de $x+\varepsilon_r$. On peut toujours poser *symboliquement*

$$\underset{p}{\overset{m}{\mathrm{S}}}(x+\varepsilon_r)=[x+\mathrm{A}_{p,m}]^m, \tag{21}$$

en entendant que le second membre représente

$$\mathrm{A}_{p,m}^{(0)}x^m+\mathrm{C}_{m,1}\mathrm{A}_{p,m}^{(1)}x^{m-1}+\mathrm{C}_{m,2}\mathrm{A}_{p,m}^{(2)}x^{m-2}+\ldots+\mathrm{A}_{p,m}^{(m)}.$$

Il s'agit de calculer les coefficients A. Par une méthode analogue à celle qui a été employée pour le développement de l'algorithme *isobarique composé*, on trouve

$$\mathrm{A}_{p,m}^{(i)}=\sum_{j=0}^{j=p-m}\mathrm{C}_{m-i+j-1,j}\underset{p-m+i-j}{\overset{i}{\mathrm{S}}}(\varepsilon_r).$$

Le coefficient $\mathrm{A}_{p,m}^{(i)}$ est donc un algorithme *homogène*, du *degré* i.

28. La formule (21) se généralise aisément. Nous laisserons au lecteur le soin de démontrer la relation

$$\underset{p}{\overset{m}{\mathrm{S}}}(\varepsilon_r+\eta_r)=\sum_{i=0}^{i=m}\left[\mathrm{C}_{m,i}\sum_{j=0}^{j=p-m}\underset{i+j}{\overset{i}{\mathrm{S}}}(\varepsilon_r)\underset{p-(i+j)}{\overset{m-i}{\mathrm{S}}}(\eta_r)\right]. \tag{22}$$

Signalons, comme cas particuliers, la formule

$$2^m\mathrm{U}_{p,m}=\sum_{i=0}^{i=m}\left[\mathrm{C}_{m,i}\sum_{j=0}^{j=p-m}\mathrm{U}_{i+j,i}\,\mathrm{U}_{p-(i+j),\,m-i}\right],$$

et d'intéressants développements, que l'on obtient en employant la relation (22) pour transformer les seconds membres des formules (8) et (9).

29. Du reste, on est conduit, par une voie aisée, aux relations qui précèdent, lorsqu'on cherche à établir certaines propriétés fondamentales de l'algorithme élémen-

taire. Désignons par $\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}{}^{(i)}$ l'ensemble des termes de $\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}$ qui ne renferment pas l'élément ε_i. Puis, distinguons, dans $\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}$, les termes qui contiennent ε_i à la première puissance, au carré, au cube, etc. On a visiblement

$$(23)\qquad \overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}} = \overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}{}^{(i)} + \mathrm{C}_{m,1}\varepsilon_i \overset{m-1}{\underset{p-i}{\mathrm{S}}}{}^{(i)} + \mathrm{C}_{m,2}\varepsilon_i^2 \overset{m-2}{\underset{p-2i}{\mathrm{S}}}{}^{(i)} + \ldots.$$

On en déduit

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_i}\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}} = m\left[\overset{m-1}{\underset{p-i}{\mathrm{S}}}{}^{(i)} + \mathrm{C}_{m-1,1}\varepsilon_i \overset{m-2}{\underset{p-2i}{\mathrm{S}}}{}^{(i)} + \mathrm{C}_{m-1,2}\varepsilon_i^2 \overset{m-3}{\underset{p-3i}{\mathrm{S}}}{}^{(i)} + \ldots\right],$$

ou bien, en vertu de (23),

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_i}\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}} = m\overset{m-1}{\underset{p-i}{\mathrm{S}}}.$$

En conséquence, si l'on ajoute x à chaque élément ε, on a

$$\frac{1}{m}\frac{d}{dx}\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}(x+\varepsilon_r)$$
$$= \overset{m-1}{\underset{p-1}{\mathrm{S}}}(x+\varepsilon_r) + \overset{m-1}{\underset{p-2}{\mathrm{S}}}(x+\varepsilon_r) + \overset{m-1}{\underset{p-3}{\mathrm{S}}}(x+\varepsilon_r) + \ldots.$$

Plus généralement, on trouve, par dérivations successives,

$$\frac{1}{m(m-1)\ldots(m-i+1)}\frac{d^i}{dx^i}\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}(x+\varepsilon_r)$$
$$= \overset{m-i}{\underset{p-i}{\mathrm{S}}}(x+\varepsilon_r) + \mathrm{C}_{i,1}\overset{m-i}{\underset{p-i-1}{\mathrm{S}}}(x+\varepsilon_r) + \mathrm{C}_{i,2}\overset{m-i}{\underset{p-i-2}{\mathrm{S}}}(x+\varepsilon_r) + \ldots$$

Il suffit de faire $x = 0$ pour obtenir l'expression de $A^{(i)}_{p,m}$.

30. Les derniers développements se prêtent à d'autres considérations. Remarquons, en effet, que si l'on pose, pour un moment,

$$\mathop{S}_{p-i(m-\nu)}^{\nu} = \sigma_\nu,$$

on a, en vertu de ce que nous venons de dire, l'égalité *symbolique*

$$(24) \qquad \sigma_m = [\sigma^{(i)} + \varepsilon_i]^m.$$

Les règles du *calcul symbolique* permettent d'*invertir* cette relation, en écrivant

$$(25) \qquad \sigma^{(i)}_m = [\sigma - \varepsilon_i]^m,$$

c'est-à-dire

$$\mathop{S}_{p}^{m}{}^{(i)} = \mathop{S}_{p}^{m} - C_{m,1}\varepsilon_i \mathop{S}_{p-i}^{m-1} + C_{m,2}\varepsilon_i^2 \mathop{S}_{p-2i}^{m-2} - C_{m,3}\varepsilon_i^3 \mathop{S}_{p-3i}^{m-3} + \ldots.$$

31. On peut donner une interprétation facile de la formule (25), dans le cas de $\varepsilon_i = 1$. On voit alors que la *$m^{\text{ième}}$ différence du premier terme de la série*

$$\mathop{S}_{p-im}^{0}, \quad \mathop{S}_{p-i(m-1)}^{1}, \quad \mathop{S}_{p-i(m-2)}^{2}, \quad \mathop{S}_{p-i(m-3)}^{3}, \quad \ldots$$

n'est autre que la partie de $\mathop{S}_{p}^{m}$ *indépendante de* ε_i.

32. Les égalités (24) et (25) nous intéressent surtout parce qu'elles permettent d'établir des relations entre les algorithmes de *fonctions différentes*. Dans ce but,

supposons $i = 1$, et observons que, si l'on veut négliger, dans $\overset{m}{\underset{p}{S}}$, les termes contenant ε_1, on doit résoudre en nombres entiers, *supérieurs à l'unité,* l'équation $\Sigma r = p$, ce qui revient à poser $r = r' + 1$, et à résoudre en nombres entiers l'équation $\Sigma r' = p - m$. On a donc

$$\overset{m}{\underset{p}{S}}{}^{(1)}(\varepsilon_r) = \overset{m}{\underset{p-m}{S}}(\varepsilon_{r+1}).$$

Conséquemment, en nous reportant à ce qui a été dit plus haut, *si l'on considère la série*

$$\overset{0}{\underset{p}{S}}(\varepsilon_r),\quad \overset{1}{\underset{p+1}{S}}(\varepsilon_r),\quad \overset{2}{\underset{p+2}{S}}(\varepsilon_r),\quad \overset{3}{\underset{p+3}{S}}(\varepsilon_r),\quad \ldots,$$

on a

$$\overset{m}{\underset{p}{S}}(\varepsilon_{r+1}) = \Delta^m\Big(\overset{0}{\underset{p}{S}}\Big),$$

pourvu que $\varepsilon_1 = 1$. Par exemple, dans notre article *Propriétés d'une fonction arithmétique,* nous avons étudié certain algorithme $u_{m,p}$ qui ne diffère pas de l'algorithme $\overset{m}{\underset{p}{S}}$ relatif *à la fonction* $\frac{1}{r+1}$. D'après ce qui vient d'être dit, et en nous rappelant l'expression de $\overset{m}{\underset{p}{S}}\left(\frac{1}{r}\right)$, donnée au commencement de ces Notes, nous pouvons affirmer que $u_{m,p}$ *est la* $m^{\text{ième}}$ *différence du premier terme de la série*

$$0,\quad \frac{s_{p,p}}{2.3\ldots(p+1)},\quad \frac{s_{p,p+1}}{3.4\ldots(p+2)},\quad \frac{s_{p,p+2}}{4.5\ldots(p+3)},\quad \ldots.$$

33. En outre, pour $i = 1$, les égalités (24) et (25)

deviennent

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}(\varepsilon_r) = \sum_{i=1}^{i=m} C_{m,i}\varepsilon_1^{m-i} \mathop{\mathrm{S}}_{p-m}^{i}(\varepsilon_{r+1}),$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{m}(\varepsilon_{r+1}) = \sum_{i=1}^{i=m} C_{m,i}(-\varepsilon_1)^{m-i} \mathop{\mathrm{S}}_{p+i}^{i}(\varepsilon_r).$$

Dans le cas particulier, considéré en dernier lieu, nous aurons donc

$$\frac{s_{p,p+m-1}}{(m+1)(m+2)..(m+p)} = \sum_{i=1}^{i=m} C_{m,i}\, u_{i,p},$$

$$(m+1)(m+2)\ldots(m+p)\, u_{m,p} = \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{i-1} C_{p+m,i-1}\, s_{p,p+m-i}.$$

34. Nous avons là des relations entre les algorithmes des fonctions ε_r et ε_{r+1}; mais on peut en établir entre les algorithmes de deux fonctions *quelconques*. Voici, par exemple, comment les algorithmes de $\frac{1}{r!}$ s'expriment au moyen des algorithmes de $\frac{1}{r}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\,\frac{\Delta^m(0^{m+p})}{(2p+1)(2p+2)\ldots(2p+m)} \\ = \frac{s_{p,2p-1}}{2p+m} - C_{2p,1}\frac{s_{p,2p-2}}{2p+m-1} + C_{2p,2}\frac{s_{p,2p-3}}{2p+m-2} - \ldots\end{aligned}$$

Les mêmes algorithmes sont donnés en fonction des algorithmes de $\frac{1}{r+1}$ par la formule

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^{p-1}}{m}\,\frac{\Delta^m(0^{m+p})}{(m+p-1)!} \\ = C_{p+m,1}\, u_{1,p} - C_{p+m+1,2}\, u_{2,p} + C_{p+m+2,3}\, u_{3,p} - \ldots\end{aligned}$$

Les formules (24) et (25), bien que fort particulières, nous serviront à développer, suivant les puissances de x, la fonction algorithmique $U_{p,m}(x)$; car, par l'emploi

des mêmes formules, la fonction U se ramène aisément à la fonction W, dont nous avons donné le développement dans un de nos articles sur le *Calcul isobarique*.

35. Nous ne devons pas terminer ces Notes sans signaler une importante généralisation de l'idée même de l'algorithme élémentaire. On y est conduit inévitablement quand on cherche à mettre le second membre de l'égalité (23) sous forme d'*algorithme d'algorithme*. On reconnaît que cela est possible seulement pour $\varepsilon_r = \eta_r$; mais, en général, on doit d'abord imaginer, dans l'idée d'algorithme, l'extension suivante : les différents éléments appartiennent à *différents* systèmes de nombres, de telle sorte que les éléments du *même système* occupent toujours, dans chaque terme, le *même rang*. Si l'on convient de distinguer par un indice supérieur les éléments de chaque système, on a

$$\overset{1}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left[\varepsilon_r^{(\rho)}\right] = \varepsilon_p^{(1)}, \quad \overset{2}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left[\varepsilon_r^{(\rho)}\right] = \varepsilon_1^{(1)}\varepsilon_{p-1}^{(2)} + \varepsilon_2^{(1)}\varepsilon_{p-2}^{(2)} + \ldots + \varepsilon_{p-1}^{(1)}\varepsilon_1^{(2)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\overset{p-1}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left[\varepsilon_r^{(\rho)}\right] = \varepsilon_1^{(1)}\varepsilon_1^{(2)}\ldots\varepsilon_1^{(p-1)}\left[\frac{\varepsilon_2^{(1)}}{\varepsilon_1^{(1)}} + \frac{\varepsilon_2^{(2)}}{\varepsilon_1^{(2)}} + \ldots + \frac{\varepsilon_2^{(p-1)}}{\varepsilon_1^{(p-1)}}\right],$$

$$\overset{p}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left[\varepsilon_r^{(\rho)}\right] = \varepsilon_r^{(1)}\varepsilon_1^{(2)}\ldots\varepsilon_1^{(p)}.$$

C'est seulement en vertu de cette extension qu'il est possible de donner une forme algorithmique au second membre de (23), et, plus généralement, de résoudre le problème de la *représentation de l'algorithme élémentaire d'une somme de fonctions, en nombre quelconque, moyennant les algorithmes des mêmes fonctions*. Nous nous en occuperons bientôt.

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE ET DE CINÉMATIQUE;

PAR M. E. DEWULF,
Colonel du Génie.

On peut définir le déplacement d'un plan P sur lui-même en donnant le centre instantané de rotation O et le cercle des centres (C). Nous supposons le plan (P) horizontal.

I. Soit (G) une courbe quelconque, algébrique ou non, liée au plan mobile; le lieu géométrique (Γ) des centres de courbure des trajectoires des points de (G) est la projection sur le plan (P) de l'intersection de deux cônes : 1° le cône qui a pour base la circonférence des centres (C) et pour sommet un point quelconque S de la verticale du point O; 2° un cône ayant pour sommet le centre instantané O et pour base la projection (G') de la courbe (G) sur un plan horizontal passant par le point S.

Toutes les propriétés des courbes (Γ) découlent de ce théorème.

II. Si la courbe (G) est un cercle (G_2) passant par le centre instantané O, la courbe (Γ_3) est une strophoïde qui a son point double au point O. Les deux cercles osculateurs de la strophoïde en O sont le cercle des centres (C) et la circonférence mobile (G_2).

Si l'on trace une transversale par le point O et si l'on désigne par M, m_1 et m_2 ses points d'intersection avec la strophoïde et les deux cercles osculateurs en O, on a toujours

$$\frac{1}{\text{OM}} = \frac{1}{\text{O}m_1} + \frac{1}{\text{O}m_2}.$$

Si le cercle mobile (G_2) devient le cercle des centres, et si le cercle (C) devient mobile, le lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des points de (C) est la même strophoïde (Γ_3).

III. Si la courbe mobile (G) se réduit à une droite g, le lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des points de g est une conique (Γ_2) osculée en O par le cercle des centres.

La droite g est aussi la corde idéale commune à (Γ_2) et au cercle infiniment petit O, ou bien, la polaire du point commun aux hypoténuses des triangles rectangles inscrits à (Γ_2) et ayant le sommet de l'angle droit en O.

SUR LES COMPLEXES DE DROITES DU PREMIER DEGRÉ ET SUR LEURS CONGRUENCES;

PAR M. ERNEST JAGGI,
Étudiant à la Faculté des Sciences de Besançon.

---

1. La définition donnée par Plücker des complexes du premier degré est la suivante :

« L'ensemble des droites dont les six coordonnées homogènes satisfont à une équation homogène et du premier degré constitue un complexe de droites du premier degré. »

Je me propose de transformer cette définition analytique en une définition géométrique et de tirer de cette dernière des conséquences géométriques.

A l'aide de la définition analytique précédente, on démontre successivement les propriétés suivantes :

THÉORÈME I. — *Il y a une infinité de droites du*

complexe qui passent par tout point de l'espace, et ces droites sont dans un même plan appelé plan focal *du point donné.*

Théorème II. — *Dans tout plan de l'espace, il y a une infinité de droites du complexe, et ces droites passent toutes par un même point du plan qu'on appelle le* foyer *du plan donné.*

Théorème III. — *Le lieu du foyer d'un plan mobile passant par une droite* D *est une seconde droite* Δ; *lorsque* D *ne fait pas partie du complexe,* Δ *n'est pas dans un même plan avec* D; *lorsque* D *fait partie du complexe,* Δ *coïncide avec* D.

Réciproquement, tout plan passant par la droite Δ précédemment définie a son foyer sur D; en sorte que les deux droites D et Δ, jouissant de propriétés réciproques, peuvent être appelées *droites conjuguées.*

Théorème IV. — *Toute droite qui fait partie du complexe et s'appuie sur une droite* D *s'appuie aussi sur la droite* Δ *conjuguée de* D, *et toute droite qui s'appuie à la fois sur deux droites conjuguées* D *et* Δ *fait partie du complexe.*

Les théorèmes qui précèdent permettent de construire géométriquement le foyer d'un plan donné et le plan focal d'un point donné connaissant deux couples de droites conjuguées (D, Δ) et (D′, Δ′). Je rappelle ces constructions, qui résultent du théorème suivant :

Théorème V. — *Les pieds de deux droites conjuguées sur un plan sont en ligne droite avec le foyer du plan.*

1° *Le foyer d'un plan sera déterminé comme point commun aux deux droites joignant les pieds de* D *et de* Δ, *de* D′ *et de* Δ′ *sur le plan donné ;*

2° *Le plan focal d'un point sera déterminé par le point donné et par la droite joignant les foyers de deux plans quelconques passant par le point.*

Ces constructions montrent qu'un complexe linéaire est complètement déterminé quand on connaît deux couples de droites conjuguées. Or, on démontre encore le théorème suivant :

Théorème VI. — *Deux couples de droites conjuguées* (D, Δ) *et* (D', Δ') *sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde dont le second mode est formé par des droites du complexe;* et l'on en déduit immédiatement le théorème suivant :

Théorème VII. — *Cinq droites du complexe déterminent géométriquement le complexe, car elles déterminent deux couples de droites conjuguées et, par suite, permettent de construire géométriquement le complexe.* (Ceci était intuitif, car l'équation du complexe dépend de cinq constantes, et ces cinq constantes sont déterminées par les cinq relations qui expriment que les cinq droites données font partie du complexe).

2. Considérons maintenant un système de droites défini ainsi qu'il suit et que je désignerai, pour abréger, par la lettre S.

(A) Par tout point de l'espace passent une infinité de droites du système et toutes ces droites sont dans un même plan, que nous appellerons *plan focal du point;* dans tout plan de l'espace existent une infinité de droites du système, et toutes ces droites passent par un même point que nous appellerons *foyer du plan.*

Je dis que le système de ces droites n'est autre qu'un complexe linéaire. En effet, de la définition géométrique précédente, on déduit que les théorèmes précé-

dents sur les droites d'un complexe sont vrais aussi pour les droites du système S, car tous se tirent des théorèmes I et II.

On arrive donc à cette conclusion :

Cinq droites du système S déterminent ce système d'une seule manière, de même qu'elles déterminent un complexe et un seul.

Les plans focaux d'un point par rapport au système S et au complexe déterminés par cinq droites données coïncident et les foyers d'un plan par rapport au système S et au complexe coïncident.

Donc, *le système* S *et le complexe linéaire définis par cinq droites coïncident;* en d'autres termes, tout système de droites qui répond à la définition géométrique (A) précédemment donnée est un complexe linéaire.

Applications. — 3. Considérons un corps solide mobile dans l'espace et dont le déplacement soit assujetti à cinq conditions; on sait que les divers points de ce solide décrivent des courbes trajectoires. On sait aussi, d'après les Mémoires de Chasles, de M. Charles Brisse et de M. Mannheim, qu'à chaque instant les normales aux trajectoires des points d'un plan qui sont dans ce plan passent par un point fixe du plan; d'ailleurs les normales à la trajectoire d'un point, en un point de cette trajectoire, sont dans le plan normal à la trajectoire en ce point. Donc, d'après ce qui précède :

Théorème I. — *Les normales aux trajectoires d'un solide de forme invariable dont le déplacement est assujetti à cinq conditions forment à chaque instant un complexe linéaire.*

On déduit facilement de là toutes les propriétés géométriques du déplacement infiniment petit du solide.

4. Considérons un solide mobile dans l'espace dont le déplacement soit assujetti à quatre conditions ; on sait que, dans ce cas, les divers points du solide décrivent en général des surfaces trajectoires. Or, ajoutons une cinquième condition arbitraire aux quatre conditions données pour le déplacement : les points du solide décriront des courbes trajectoires sur les surfaces précédentes, et à chaque instant les normales relatives à ce déplacement formeront un complexe linéaire; parmi ces normales, seront les normales aux surfaces trajectoires en tous les points du solide. Changeons la cinquième condition que nous avions ajoutée : les courbes trajectoires changent sur les surfaces trajectoires, et les normales relatives au déplacement correspondant forment un nouveau complexe linéaire.

Ainsi, à un instant donné, les normales aux surfaces trajectoires en tous les points du solide appartiennent à deux complexes linéaires; par conséquent :

Théorème II. — *A chaque instant, les normales en tous les points d'un solide assujetti à quatre conditions, à leurs surfaces trajectoires, forment une congruence de complexes linéaires.*

On peut déduire immédiatement de là toutes les propriétés géométriques du déplacement infiniment petit : par exemple, ce théorème fondamental démontré par M. Mannheim :

Les normales aux surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions rencontrent toutes deux mêmes droites (directrices de la congruence).

Les surfaces focales de la congruence trouvent facilement aussi leur application, mais je ne veux faire ici

qu'indiquer les moyens d'appliquer les complexes et les congruences linéaires.

5. Les réciproques des deux théorèmes I et II sur les normales relatives aux déplacements d'un solide assujetti à cinq ou à quatre conditions sont faciles à démontrer.

Je dis d'abord que tout complexe linéaire peut être considéré comme formé par les normales aux courbes trajectoires d'un solide de forme invariable dont le déplacement est assujetti à cinq conditions. En effet, prenons cinq droites du complexe et cinq arcs élémentaires de courbe normaux respectivement à chacune de ces droites en des points quelconques, ces arcs étant, en outre, normaux aux plans focaux des points choisis. Ces cinq trajectoires définissent le déplacement infiniment petit du solide; le complexe des normales relatif à ce déplacement coïncide avec le complexe donné, car cinq droites déterminent d'une seule manière un complexe linéaire.

Je dis maintenant que toute congruence de complexes linéaires peut être considérée comme composée des normales à un instant donné aux surfaces trajectoires des points d'un solide soumis à quatre conditions. En effet, chaque complexe linéaire auquel appartiennent les droites de la congruence peut être considéré comme composé des normales aux courbes trajectoires décrites par le solide dont le déplacement infiniment petit serait soumis aux quatre conditions précédentes et à une cinquième condition arbitraire.

6. Comme dernière application, je me propose d'expliquer géométriquement l'analogie constatée par M. Appell, qui existe entre le système des pôles et plans po-

laires dans une cubique gauche et le système des foyers et plans focaux dans le déplacement infiniment petit hélicoïdal (c'est-à-dire assujetti à cinq conditions). Nous savons que les normales aux trajectoires des divers points d'un solide assujetti à un déplacement hélicoïdal forment un complexe linéaire.

Or les droites, appelées *droites conjuguées d'elles-mêmes* par M. Appell, dans sa thèse, sont telles que toutes celles, qui passent par un point de l'espace, sont dans le plan polaire du point, et toutes celles, qui sont dans un plan, passent par le pôle du plan (*voir* la thèse de M. Appell, Ire Partie). Elles forment donc un complexe linéaire (définition géométrique du complexe linéaire) : de là l'analogie indiquée.

Dans la seconde Partie de sa thèse, M. Appell démontre par l'analyse qu'il existe toujours un déplacement hélicoïdal et un seul dont le système des foyers et plans focaux est identique au système des pôles et plans polaires dans une cubique donnée; ceci est évident géométriquement d'après ce qui précède, car cinq droites conjuguées d'elles-mêmes par rapport à la cubique déterminent un complexe linéaire d'une seule manière, et tout complexe linéaire répond à un déplacement hélicoïdal infiniment petit et à un seul.

La réciproque, démontrée analytiquement par M. Appell, se démontre géométriquement de la manière suivante :

Les normales relatives à un déplacement hélicoïdal infiniment petit forment un complexe linéaire. Or cinq droites arbitraires, que nous pouvons d'ailleurs prendre parmi les droites du complexe précédent, peuvent toujours être considérées comme cinq droites conjuguées d'elles-mêmes par rapport à une certaine cubique (*voir* la thèse de M. Appell, Ire Partie), et alors le système des

pôles et plans polaires de cette cubique coïncide avec le système des foyers et plans focaux du déplacement hélicoïdal, puisqu'un complexe linéaire est déterminé d'une seule manière par cinq droites. Si l'on déplace la cubique trouvée parallèlement à son axe et qu'on la fasse tourner autour de cet axe d'une façon quelconque, le système de ses pôles et plans polaires ne change pas; par conséquent,

Il existe une infinité de cubiques gauches, égales et ayant même axe, dont le système des pôles et plans polaires est identique au système des foyers et plans focaux d'un déplacement hélicoïdal infiniment petit donné.

Il n'y a d'ailleurs pas d'autres cubiques que les précédentes répondant à la question, car deux cubiques, qui ne sont pas égales ou qui n'ont pas même axe, n'ont pas le même système de pôles et plans polaires.

QUELQUES RÉFLEXIONS SUR L'ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES COURBES GÉOMÉTRIQUES ET THÉORÈMES POUVANT Y ÊTRE UTILES;

PAR M. J.-E. ESTIENNE.

On connaît sur les courbes géométriques plusieurs théorèmes généraux. Un des plus remarquables, dû à Euler, est le suivant :

THÉORÈME I. — *Toute courbe d'ordre n, qui passe par $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ points fixes, passe par $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ autres points fixes.*

Ce théorème énonce une propriété intime et caractéristique des courbes géométriques, qui peut servir au géomètre de point de départ dans l'étude de ces courbes.

Les courbes géométriques sont définies analytiquement par ce fait que leur équation cartésienne est algébrique. Cette définition suffit à l'analyste, mais non au géomètre, qui, n'usant pas de coordonnées, a besoin, pour étudier une courbe, d'en avoir une définition purement géométrique.

On n'entend pas par là critiquer l'admirable classification des courbes, en ordres, introduite par Descartes; on veut dire simplement que, pour les étudier, il faut que le géomètre parte de leur définition algébrique, en la traduisant dans son langage par un théorème géométrique.

De l'équation d'une courbe d'ordre n, on déduit, par exemple, qu'une droite quelconque coupe cette courbe en n points. Voilà une propriété que le géomètre pourrait songer à prendre comme définition de la courbe d'ordre n. La tentative, faite je crois plusieurs fois, n'a pas réussi.

Cette simple propriété ne suffit pas à la Géométrie; elle a besoin, pour pouvoir progresser avec ses seules ressources, des renseignements plus complets de l'Analyse.

On lui empruntera les suivants :

1° *Une courbe d'ordre n est définie par* $\frac{n(n+3)}{2}$ *de ses points;*

2° *Deux courbes d'ordre n et p se coupent en np points;*

3° Le théorème I, énoncé plus haut.

Ces notions suffisent à établir le théorème de Pascal, et, par suite, à faire l'étude des coniques.

Un très bon énoncé du théorème de Pascal est en effet celui-ci :

Si six points sont sur une conique, deux cubiques quelconques, passant par ces six points, se coupent en trois autres points qui sont en ligne droite.

Ce théorème est facile à déduire du théorème I, appliqué aux cubiques ($n = 3$).

On a le théorème de Pascal sous sa forme ordinaire en considérant les côtés non consécutifs d'un hexagone inscrit à une conique, comme constituant une cubique.

Cette relation géométrique entre six points d'une conique remplace parfaitement, pour le géomètre, l'équation de cette courbe. Il peut, à la rigueur, faire une étude complète des coniques par les procédés qui lui sont propres, sans avoir recours à l'équation du second ordre. Il est débarrassé de la tutelle de l'Algèbre.

Pour étudier une courbe géométrique d'ordre n que $\frac{n(n+3)}{2}$ points définissent, il faudrait une relation analogue entre $\frac{n(n+3)}{2}+1$ points *quelconques* de cette courbe. Il faudrait savoir, dans le cas des cubiques, par exemple, comment sont liés dix quelconques de leurs points.

Ici, le théorème I, d'où l'on a déduit le théorème de Pascal, est impuissant. Il donne bien une relation entre treize points d'une cubique, à savoir que deux quartiques passant par ces treize points se coupent en trois autres points, qui sont en ligne droite; mais cela est sans grande utilité et ne répond d'ailleurs pas à la question.

Nous aurons recours à un autre théorème général, que nous croyons nouveau.

On est conduit à souçonner ce théorème, si l'on remarque l'identité suivante :

$$\left[\frac{(n-1)(n-1+3)}{2}+1\right]+\left[\frac{(n-2)(n-2+3)}{2}+1\right]=n^2$$

que nous exprimerons ainsi en langage ordinaire :

Le nombre des points, augmenté de un, nécessaire à la détermination d'une courbe d'ordre $n-1$, *ajouté au nombre des points augmenté de un, nécessaires à la détermination d'une courbe d'ordre* $n-2$, *est égal au nombre des points d'intersection de deux courbes d'ordre* n.

Or on sait que les n^2 points d'intersection de deux courbes d'ordre n ne sont pas quelconques; si un certain nombre d'entre eux $\frac{(n-1)(n-1+3)}{2}+1$ sont sur une courbe d'ordre $n-1$, ils satisfont à une relation différente de celle qui lie les n^2 points, mais qui peut se combiner avec elle, de telle sorte que les points restants satisfassent à une nouvelle relation; comme leur nombre surpasse de un le nombre des points nécessaires à la détermination d'une courbe d'ordre $n-2$, il vient tout d'abord à l'esprit qu'ils sont sur une courbe d'ordre $n-2$; c'est, en effet, ce qui a lieu, comme on le verra plus loin.

Qu'on excuse ces raisonnements par à peu près; on les a écrits parce qu'ils constituent presque une méthode pour l'étude des questions analogues à celles qui sont traitées dans ce modeste travail : ils permettent de voir s'il y a un théorème, et en quoi il peut consister. Ce n'est d'ailleurs pas une innovation; il y a longtemps que Lagrange disait que les découvertes en Mathématiques se font par l'appréciation du degré de détermination de la quantité.

Démontrons maintenant le théorème :

THÉORÈME II. — *Si des* n^2 *points d'intersection de deux courbes d'ordre* n, $\frac{(n-1)(n-1+3)}{2}+1$ *sont sur*

une courbe d'ordre $n-1$, *les* $\frac{(n-2)(n-2+3)}{2}+1$ *autres sont sur une courbe d'ordre* $n-2$, *et inversement.*

On démontre ce théorème en appliquant le théorème I à une courbe d'ordre $2n-3$.

Distinguons, dans les n^2 points d'intersection des deux courbes d'ordre n, deux groupes a et b; le groupe a comprenant les $\frac{(n-1)(n-1+3)}{2}+1$ points qui sont sur une courbe d'ordre $n-1$ et le groupe b, tous les autres, qu'on veut prouver être sur une courbe d'ordre $n-2$.

La courbe $n-1$ coupe chacune des courbes n en $n(n-1)$ points dont

$$n(n-1)-\left[\frac{(n-1)(n-1+3)}{2}+1\right]=\frac{(n-3)n}{2}$$

nouveaux.

Par ces $\frac{(n-3)n}{2}$ points, faisons passer la courbe d'ordre $n-3$ qu'ils déterminent.

Nous avons, dans le plan, un nombre de points $n^2+(n-3)n$ ou $n(2n-3)$; en isolant un point du groupe b, il reste $n(2n-3)-1$ ou

$$\frac{(2n-3)(2n-3+3)}{2}-1 \text{ points,}$$

et toutes les courbes d'ordre $2n-3$ qui passent par ces points passent, d'après le théorème I, par $(n-2)(2n-5)$ autres points fixes.

Or l'une des courbes d'ordre n et la courbe d'ordre $n-3$, déterminée par les points nouveaux situés sur l'autre courbe d'ordre n, constituent une courbe d'ordre $2n-3$; la combinaison des deux autres courbes d'ordre n et $n-3$ constitue encore une courbe d'ordre $2n-3$; le point isolé fait partie de l'intersection de ces deux systèmes; donc, toute courbe d'ordre $2n-3$, pas-

sant par les $n(2n-3)-1$ points du plan, autres que ce point isolé, passe par ce point isolé; en particulier, la courbe d'ordre $2n-3$, constituée par la courbe d'ordre $n-1$ passant par les points du groupe a et par la courbe d'ordre $n-2$ qu'on peut faire passer par les points du groupe b moins le point isolé, ce qui exige que la courbe b passe par ce point isolé. C. Q. F. D.

On peut ajouter que la courbe b passe par les points nouveaux d'intersection des courbes $n-3$ avec les courbes n.

Ce théorème général, appliqué aux cubiques, donne, au moyen des courbes *connues* du second ordre, une relation entre dix points d'une cubique :

Théorème. — *Si, par dix points d'une cubique, on fait passer deux courbes du quatrième ordre (deux groupes de deux coniques, en particulier), elles se coupent en six nouveaux points qui sont sur une conique* C.

De plus, la droite, qui joint les deux autres points α, β d'intersection d'une des quartiques avec la cubique coupe cette quartique en deux autres points p, q, qui sont également sur la conique C.

On reviendra plus loin sur cet important théorème.

Le théorème II s'applique encore, si l'une des courbes d'ordre n comprend un certain nombre de droites; le degré de la courbe, sur laquelle se trouvent les points d'intersection restants, s'abaisse d'autant. On a, par exemple, ce théorème :

Théorème. — *Si, des vingt points d'intersection d'une courbe du quatrième ordre avec une courbe du cinquième ordre, dix sont sur une cubique, les dix autres sont aussi sur une cubique.*

On peut déduire de là des propositions plus ou moins intéressantes, celle-ci par exemple :

THÉORÈME. — *Si les côtés d'un pentagone touchent une cubique aux points* 1, 2, 3, 4, 5, *ils en touchent une autre aux points* 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, *où ils sont coupés par la conique passant par les points* 1, 2, 3, 4, 5.

On le démontre en appliquant le théorème précédent à la courbe du cinquième ordre formée par les côtés du pentagone et à la quartique formée par la conique doublée.

Pour démontrer le théorème général II, applicable à une courbe d'ordre n, on a eu recours à une propriété d'une courbe de degré plus élevé, $2n - 3$, qui ne figure ni dans l'énoncé, ni dans les constructions. Cette méthode se prête bien à la recherche et à la démonstration des propriétés des courbes d'ordre supérieur au second, ou des systèmes de coniques.

C'est ainsi qu'on démontre facilement les théorèmes suivants, sortes de porismes, que l'Analyse aurait parfois de la peine à atteindre.

LEMME. — *Si, par les neuf points d'intersection de deux cubiques, on fait passer une courbe* A *du quatrième degré, ses trois nouveaux points d'intersection* a, b, c *avec l'une des cubiques* B *sont en ligne droite.*

Car une droite D quelconque coupant A aux points α, β, γ, δ et la cubique B constituent une courbe du quatrième ordre, qui coupe la courbe A en α, β, γ, δ, a, b, c et en les neuf points donnés.

Par ces neuf points et le point α par exemple, on peut faire passer une cubique; les six points restants (β, γ, δ, a, b, c) sont donc sur une conique (théorème II); comme β, γ, δ sont sur une droite, a, b, c sont aussi sur une droite.

Remarque. — Ce lemme s'exprimerait analytiquement en disant :

« L'équation générale des quartiques passant par les points d'intersection de deux cubiques B et B′ est

$$BD + B'D' = 0,$$

D et D′ étant des droites. »

THÉORÈME. — *Si, par sept points pris sur une cubique fixe* A, *on fait passer une cubique* B, *elle coupe* A *en deux nouveaux points; la droite* D *qui les joint coupe* A *en un point fixe.*

Soit D′ la droite qui joint les points nouveaux d'intersection d'une cubique passant par les sept points, avec la cubique A ; cette droite D′ et la cubique B constituent une quartique, et l'on voit, en appliquant le lemme, que l'intersection de D′ et de A est sur D.

Remarque. — Ce théorème donne une construction du neuvième point commun aux cubiques passant par huit points, quand trois de ces huit points sont sur une droite, ou six sur une conique.

THÉORÈME ANALOGUE. — *Si, par quatre points pris sur une cubique fixe* A, *on fait passer une cubique* B, *elle coupe* A *en cinq nouveaux points ; la conique qu'ils déterminent coupe* A *en un point fixe.*

Ce théorème se démontrerait comme le précédent, en invoquant le lemme suivant, facile à démontrer au moyen du théorème II.

LEMME. — *Une courbe du cinquième ordre qui passe par l'intersection de deux cubiques coupe l'une d'elles en six nouveaux points, situés sur une conique.*

On démontrerait de même, en s'appuyant sur un lemme analogue aux précédents, le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si, par onze points de la courbe fixe du quatrième ordre* A, *on fait passer une courbe va-*

riable du quatrième ordre B, *elle coupe* A *en cinq nouveaux points, la conique qui passe par ces cinq points passe par trois points fixes de* A, *quand* B *varie.*

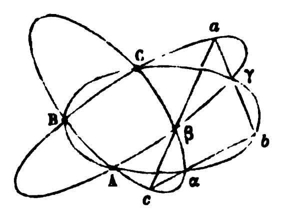
Tous ces théorèmes procèdent évidemment d'un théorème général; mais il est d'un énoncé trop complexe pour être intéressant.

Appliquons la méthode à la démonstration d'une propriété d'un système de coniques :

Théorème. — *Si trois coniques* a, b, c *sont circonscrites à un triangle* ABC, *on peut, par les points* α, β, γ, *où elles se coupent deux à deux, faire passer les côtés d'une infinité de triangles, dont les sommets* a, b, c *sont sur chacune des coniques* (*fig.* 1).

Considérons, en effet, les huit points A, B, C, α, β, γ et a, c, ces deux derniers points étant à l'intersection d'une droite quelconque passant par β et de chacune des

Fig. 1.



coniques a et c. Toutes les cubiques passant par ces huit points passent par un neuvième; donc les trois cubiques que constituent les trois groupes de droites et de coniques :

La conique a et la droite $c\alpha$,
» b » ca,
» c » $a\gamma$

passent par un même point b, et le théorème est démontré.

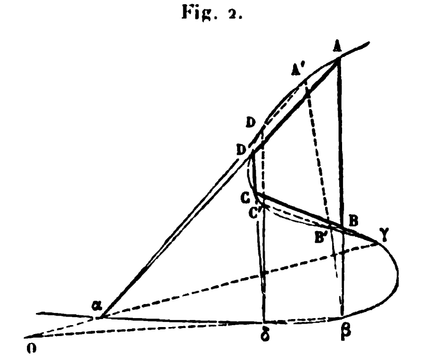
On démontrera encore par la considération du neuvième point le théorème, assez intéressant, qui suit :

THÉORÈME. — *Si l'on peut inscrire à une cubique un quadrilatère* ABCD *dont les côtés passent par quatre points* α, β, γ, δ *donnés sur cette cubique, on en peut inscrire une infinité* (*fig.* 2).

Menons, en effet, par α une droite quelconque, coupant la cubique en A′ et D′; menons les droites A′β et D′δ qui coupent la cubique, respectivement en B′ et C′; il faut démontrer que les points B′, C′, γ sont en ligne droite.

Or le point O, intersection des droites $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, est sur la cubique donnée, puisqu'il est le neuvième point

Fig. 2.



commun à toutes les cubiques passant par les huit points A, B, C, D, α, β, γ, δ. Donc les neuf points A′, B′, C′, D′, α, β, γ, δ, O sont à l'intersection de deux cubiques : la cubique donnée et le système des trois droites A′B′, $\alpha\gamma$, C′D′. Comme six de ces points sont sur la conique formée par les deux droites A′D′, $\beta\delta$, les trois autres B′, γ, C′ sont en ligne droite.

REMARQUES SUR LES THÉORÈMES PRÉCÉDENTS.

Le petit nombre de théorèmes qu'on vient de démontrer donne une idée du parti qu'on peut tirer du théorème général II dans l'étude géométrique des courbes géométriques.

Au point de vue spécial de la théorie des cubiques, ce théorème général donne une relation, analogue à celle de Pascal pour les coniques, entre dix points d'une cubique, à savoir que : *Deux groupes de deux coniques passant par dix points d'une cubique se coupent en six nouveaux points qui sont sur une conique.*

Ce théorème permet d'aborder la solution graphique des problèmes suivants et de leurs analogues :

Trouver l'intersection d'une cubique passant par neuf points donnés :

1° *Avec une droite passant par un ou deux de ces neuf points ;*

2° *Avec une conique passant par quatre ou cinq de ces neuf points ;*

3° *Avec une cubique passant par sept de ces points.*

Mener la tangente en un point d'une cubique définie par ce point et huit autres.

Trouver le neuvième point commun à toutes les cubiques passant par huit points donnés.

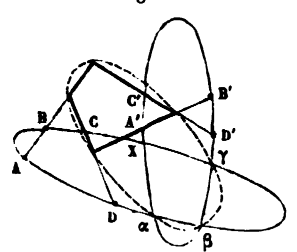
On ne veut pas dire que la solution de ces problèmes se trouve immédiatement, ni même qu'elle soit facile ; mais, comme cette solution est ramenée à la recherche de certaines coniques, on est affranchi de toute considération sur les cubiques, et l'on n'a à opérer que sur des courbes du second ordre, déjà connues.

C'est ainsi, par exemple, que la recherche du neuvième point X commun à toutes les cubiques qui passent par

huit points A, B, C, D, A', B', C', D' se ramène à ceci (*fig.* 3) :

Trouver un point X *tel que les deux coniques se coupant en ce point et passant l'une par* A, B, C, D *et l'autre par* A', B', C', D' *se coupent en trois autres points* α, β, γ *qui soient sur une conique passant par les quatre intersections des droites* AB, CD *avec les droites* A'B', C'D'; *ou, plus généralement, qui soient sur une conique*

Fig. 3.



passant par les quatre points d'intersection de deux coniques quelconques dont l'une est circonscrite au quadrilatère ABCD *et l'autre au quadrilatère* A'B'C'D'.

Il suffit, en effet, de se reporter au théorème général sur les cubiques, pour voir que l'un quelconque de ces quatre points d'intersection, le point X et les huit points donnés sont dix points d'une même cubique.

(*A suivre.*)

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE SUR LE CENTRE DES MOYENNES DISTANCES;

Par M. X. ANTOMARI,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Rennes.

Définition. — Étant donné un système de m points A_1, A_2, ..., A_m affectés respectivement des coefficients

$a_1, a_2, \ldots, a_m$, nous appellerons composition de ces m points l'opération qui consiste à chercher leur centre des distances proportionnelles.

THÉORÈME I. — *Soit un système de m points affectés respectivement du coefficient 1. On les combine p à p de toutes les manières possibles et l'on compose les p points de chaque combinaison ; on obtient ainsi un système (a) de $C_{m,p}$ points. A toute combinaison p à p correspond une combinaison $m-p$ à $m-p$; on compose les $m-p$ points de chacune de ces combinaisons, ce qui donne un nouveau système (b) de $C_{m,m-p}$ points. Les deux systèmes (a) et (b) sont homothétiques par rapport au centre des moyennes distances des m points donnés, et le rapport d'homothétie est égal à $\frac{m-p}{p}$.*

Soit en effet O_1 le centre des moyennes distances d'une combinaison des m points p à p, et soit O_2 le centre des moyennes distances des $m-p$ points restants. Si l'on affecte O_1 du coefficient p, O_2 du coefficient $m-p$ et que l'on compose ces deux points, on obtient le centre des moyennes distances des m points donnés. C'est le point G de la droite O_1O_2, tel que l'on ait

$$\frac{O_1G}{GO_2} = \frac{m-p}{p}.$$

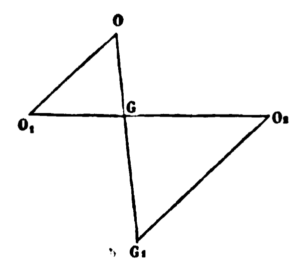
Les points O_1 et O_2 sont donc deux points homologues de deux systèmes homothétiques inverses par rapport au point G, et le rapport d'homothétie est égal à $\frac{m-p}{p}$.

THÉORÈME II. — *Soient O_1 et O_2 deux points homologues obtenus comme dans le théorème I. On joint un*

point fixe O *aux points tels que* O_1 *et l'on mène par les points homologues* O_2 *les parallèles à ces droites. Toutes ces parallèles concourent au même point.*

La proposition résulte de ce que O_1 et O_2 sont deux points homologues de deux systèmes homothétiques. Nous allons l'établir directement, de sorte que la proposition correspondante des systèmes homothétiques en résultera.

Composons en effet les trois points O_1, O_2, O affectés respectivement des coefficients p, $m-p$ et $(-p)$. En



composant d'abord O avec O_1, on voit que le centre des distances proportionnelles se trouve sur la parallèle à OO_1 menée par O_2. Composant ensuite O_1 avec O_2, on obtient le centre des moyennes distances des m points donnés; soit G ce point. Le centre des distances proportionnelles des trois points O, O_1, O_2 sera un point G_1 de OG, tel que l'on ait

$$\frac{OG_1}{G_1G} = \frac{m-p}{p}.$$

Donc le point G_1 est un point fixe.

REMARQUE CONCERNANT LA LIMITE DE $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$;

PAR M. ESCARY.

Si, dans le terme général

$$\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots n}$$

du développement de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, on pose

$$m = n^2\omega,$$

il vient

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$$
$$=\left(1-\frac{\varepsilon_1}{n\omega}\right)\left(1-\frac{\varepsilon_2}{n\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{\varepsilon_{n-1}}{n\omega}\right),$$

en faisant

$$\varepsilon_i = \frac{i}{n} \quad \text{avec} \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1.$$

Or on peut toujours disposer de ω, et par suite de m, de manière à avoir

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_{n-1} < n\omega.$$

Sous cette condition, on aura

$$1 > \left(1-\frac{\varepsilon_1}{n\omega}\right)\left(1-\frac{\varepsilon_2}{n\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{\varepsilon_{n-1}}{n\omega}\right)$$
$$> 1-\frac{1}{n\omega}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1})$$

ou

$$1 > \left(1-\frac{\varepsilon_1}{n\omega}\right)\left(1-\frac{\varepsilon_2}{n\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{\varepsilon_{n-1}}{n\omega}\right) > 1-\frac{1-\frac{1}{n}}{2\omega},$$

et l'on voit, sous cette forme, que pour des valeurs indéfiniment croissantes de ω le numérateur du terme général que nous considérons a pour limite l'unité.

Donc *le nombre e est la limite d'une fonction algébrique de deux entiers m et n dont le rapport du premier au carré du second croît indéfiniment, et qui sont eux-mêmes indéfiniment croissants.*

La même conclusion s'applique à l'exponentielle

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m,$$

x pouvant être réel ou imaginaire.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Traité de Géométrie descriptive; par M. *Ernest Songaylo,* examinateur d'admission à l'École centrale des Arts et Manufactures, chef de travaux graphiques et répétiteur à la même École, professeur de Géométrie descriptive au collège Chaptal et à l'École Monge. 1re Partie, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales. Un beau volume grand in-4, de VI-440 pages et un atlas même format de 72 planches. Paris, Gauthier-Villars; 1882. Prix : 35^{fr}.

Traité de Géométrie analytique (courbes planes), destiné à faire suite au Traité des sections coniques; par *G. Salmon,* professeur à l'Université de Dublin. Ouvrage traduit de l'anglais par M. *O. Chemin,* ingénieur des Ponts et Chaussées, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, et suivi d'une Étude sur les points singuliers, par M. *G. Halphen.* In-8, avec figures dans le texte. Paris, Gauthier-Villars; 1884. Prix : 12^{fr}.

Problèmes de Physique, de Mécanique, de Cosmographie, de Chimie, à l'usage des candidats aux baccalauréats ès sciences, au baccalauréat de l'enseignement spécial et aux écoles du gouvernement; par M. *Edme Jacquier*, licencié ès sciences mathématiques et physiques, professeur de l'Université, officier de l'Instruction publique, membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique. Un beau volume in-8, avec 68 figures. Paris, Gauthier-Villars; 1884. Prix : 6fr.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas, publicado pelo Dr *F. Gomes Teixeira*, professor de Mathematica na Universidade de Coimbra, socio corrispondente da Academia real das sciencias de Lisboa e da sociedade de sciencias physicas e naturales de Bordeaux. Vol. IV e V. In-8. Coimbra, imprensa da Universidade; 1883 et 1884.

Histoire des Sciences mathématiques et physiques; par M. *Maximilien Marie*, répétiteur de Mécanique et examinateur d'admission à l'École Polytechnique. T. V : de Huygens à Euler. Petit in-8. Paris, Gauthier-Villars; 1884. Prix : 6fr.

Œuvres complètes de Laplace, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par MM. les Secrétaires perpétuels. Tome VI. Paris, Gauthier-Villars; 1884. Prix : 20fr.

Œuvres complètes de Lagrange, publiées par les soins de M. *J.-A. Serret*, membre de l'Institut, sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique. Tomes X et XIII. In-4. Paris, Gauthier-Villars; 1882-1884. Prix : Tome X, 18fr; Tome XIII, 15fr.

Œuvres complètes d'Augustin Cauchy, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique. 1re série, Tomes I et IV. In-4. Paris, Gauthier-Villars; 1882-1884. Prix : 25fr chacun.

Essai sur l'Histoire des Mathématiques dans la Suisse française; par M. *L. Isely fils,* professeur. In-4. Neuchâtel, James Attinger; 1884.

QUESTIONS.

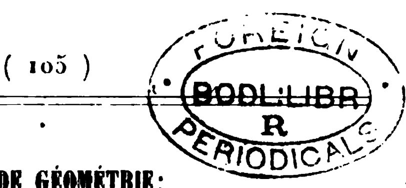
1523. Soit $[f(x)]_{x_1}^{x_2}$ l'expression de l'aire comprise entre un arc de courbe, l'axe des abscisses et les ordonnées extrêmes. A l'arc de courbe on inscrit une ligne polygonale, dont tous les côtés ont, sur l'axe des abscisses, des projections égales à ε. L'expression de l'aire comprise entre cette ligne, l'axe des abscisses et les ordonnées extrêmes est

$$\tfrac{1}{2}[f(x+B\varepsilon)+f(x-B\varepsilon)]_{x_1}^{x_2},$$

pourvu que l'on remplace les puissances de B par les nombres de Bernoulli correspondants. (E. Cesaro.)

1524. 1° Les points où les arêtes d'une des faces d'un tétraèdre sont rencontrées par les plans bissecteurs extérieurs des dièdres opposés sont en ligne droite; 2° cette droite est dans le plan déterminé par les points où les trois autres arêtes sont rencontrées par les plans bissecteurs intérieurs des dièdres opposés.

(E. Cesaro.)



NOTE DE GÉOMÉTRIE;

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

En 1851, Chasles proposa au Concours général la question suivante :

Étant donnés deux cercles O *et o qui ne se touchent pas, mais qui peuvent se couper ou ne pas se couper indifféremment, de chaque point* M *de l'un* O, *on mène deux droites aux centres de similitude* S *et* S′ *des deux cercles; ces droites rencontrent l'autre cercle en quatre points m, n, m′, n′.*

On demande de prouver que deux de ces points sont sur un diamètre du cercle o, et les deux autres sur une droite qui passe par un point fixe, quel que soit le point M *pris sur le cercle* O.

Malgré les solutions données, cette question ayant été jugée trop difficile, Chasles publia, sans nom d'auteur, une brochure intitulée : *Diverses solutions de la question de Mathématiques élémentaires proposée au Concours général en* 1851. Les solutions renfermées dans cette brochure sont au nombre de dix; en voici une onzième :

Relativement aux centres de similitude S et S′, les points m et n sont les homologues du point M; par conséquent, les rayons Om, On sont parallèles à OM, et, par suite, mn est un diamètre de O. Il reste à démontrer que les points m' et n', antihomologues de M, appartiennent à une corde qui passe par un point fixe, quel que soit M sur O.

Considérons O et o comme de petits cercles d'une sphère. S et S′ sont alors les sommets des deux cônes

qui contiennent ces cercles. Le plan SMS′ coupe le plan du cercle *o* suivant la droite *m′n′*. Lorsque M varie de position, le plan SMS′ tourne autour de la droite SS′, et sa trace sur le plan de *o* tourne alors autour de la trace de SS′ sur ce plan; donc *m′n′* passe par un point fixe.

Il suffit maintenant de projeter coniquement toute la figure sur un plan arbitraire, les projetantes partant de l'une des extrémités du diamètre de la sphère qui est perpendiculaire au plan de projection ([1]), pour obtenir l'achèvement de la solution de la question proposée.

Remarques. — La corde *m′n′* est l'antiparallèle de *mn* dans l'angle *m*M*n*. On peut alors énoncer ainsi la question précédente :

Dans l'angle *m*M*n*, *la corde du cercle o, antiparallèle du diamètre mn qui est parallèle à* OM, *passe par un point fixe, quelle que soit la direction de* OM.

Si le rayon OM est nul, ce théorème se réduit à celui-ci :

Dans l'angle *m*O*n*, *la corde du cercle o, antiparallèle du diamètre mn, passe par un point fixe, quel que soit ce diamètre.*

Comme on vient de le voir et comme on l'a souvent dit, il peut être utile de recourir à une figure de l'espace pour arriver à une solution simple d'une question de Géométrie plane. Voici encore un exemple à l'appui de cette observation :

Construire sur un plan une circonférence tangente à trois circonférences données.

([1]) Les petits cercles de la sphère se projettent suivant des circonférences. (Voir *Traité de Géométrie* de Rouché et de Comberousse, p. 272 et suiv.)

Prenons d'abord trois circonférences O, O_1, O_2 sur une sphère. Les circonférences O et O_1 appartiennent à deux cônes; appelons s_2 le sommet extérieur à la sphère. De même, pour O_1 et O_2, on a s et, pour O et O_2, on a s_1.

On sait que s, s_1, s_2 sont en ligne droite.

Le plan mené par cette droite tangentiellement aux trois cônes coupe la sphère suivant une circonférence tangente à O, O_1, O_2.

Construisons le point où ce plan touche O_2. Pour cela, menons un plan qui passe par la ligne des sommets et par le point a pris arbitrairement sur O; ce plan coupe le cône de sommet s_2 suivant la génératrice as_2 qui rencontre O_1 au point a_1, antihomologue de a.

On a de même sur la génératrice as_1 le point de O_2 qui est l'antihomologue de a. Enfin, soit a'_2 l'antihomologue de a_1 sur O_2.

Le plan auxiliaire coupe alors le plan de O_2 suivant la droite $a_2 a'_2$. Le point i, où cette droite rencontre la ligne des sommets, est le point de rencontre de cette ligne et du plan de O_2.

Ce point ne change pas lorsqu'on fait varier le plan auxiliaire; la construction précédente donne donc toujours des droites, telles que a_2, a'_2, qui passent par i, lorsque a se déplace sur O.

Parmi ces droites, il y a les tangentes à O_2 issues de i; les points de contact de ces tangentes sont les points où O_2 est touchée par les circonférences suivant lesquelles la sphère est coupée par les plans tangents aux cônes menés par la ligne ss_1s_2.

Je ne reprends pas la recherche des différentes solutions. Projetons maintenant coniquement toute la figure sur un plan arbitraire, les projetantes partant de l'une des extrémités du diamètre de la sphère qui est perpen-

diculaire au plan de projection. La figure ainsi obtenue sur le plan de projection donne les tracés qui conduisent à la construction d'une circonférence tangente à trois circonférences données.

Dans le cas du plan, il est inutile de construire les sommets s, s_1, s_2 qui sont maintenant des centres de similitude externe.

Des centres o, o_1, o_2 des trois circonférences, on mène des rayons parallèles et de même sens au moyen de ces droites, on construit les points a_1, a_2, antihomologues de a. Puis on construit de même a'_2 antihomologue de a_1.

Au moyen d'un autre point pris sur O, on construit des points α_2, α'_2 analogues à a_2, a'_2.

Les droites $a_2\alpha'_2$, $\alpha_2 a'_2$ se coupent en un point ; d'autre part, les droites $a_2\alpha_2$, $a'_2\alpha'_2$ se coupent en un autre point : la droite, qui joint ces deux points coupe O_2 en des points qui sont les points de contact de O_2 avec deux des circonférences demandées. Ces circonférences touchent O et O_1 en des points qui sont les antihomologues des deux points qui viennent d'être déterminés sur O_2.

De cette solution, il est facile de déduire l'élégante solution que l'on doit à Gergonne.

Remarque. — *Les points a, a_1, a_2, a'_2 sont sur une circonférence de cercle. Cette circonférence coupe* O, O_1, O_2 *sous des angles égaux.*

On peut dire alors : *Les cordes communes à* O_2 *et aux circonférences qui coupent* O, O_1, O_2 *sous des angles égaux passent par un point fixe.*

Sphère tangente à quatre sphères. — Je n'examinerai pas toutes les solutions de ce problème. Je vais simple-

ment dire quelques mots de l'extension de la solution précédente au cas où l'on demande de construire une sphère tangente à quatre sphères.

Appelons (O), (O_1), (O_2), (O_3) les quatre sphères données. Employons les sommets externes des cônes qui les enveloppent deux à deux, soit a un point de (O). Prenons, comme précédemment, les antihomologues a_1, a_2 de a sur (O_1) et (O_2), puis l'antihomologue a'_2 de a_1 sur (O_2).

D'après ce qui précède, a, a_1, a_2, a'_2 sont sur une même circonférence.

Prenons maintenant sur (O_3) les antihomologues b, b_1, b_2, b'_2 de ces quatre points.

Les points a, a_1, b, b_1 sont sur une circonférence de cercle, il en est de même de a_1, a_2, b_1, b_2. Ces deux circonférences sont sur la sphère qui contient a, a_1, a_2, a'_2 et le point b_1. Par suite, comme il est facile de le voir, les quatre points b, b_1, b_2, b'_2 sont sur cette sphère : ils appartiennent alors à une circonférence de cercle. Cette circonférence est l'intersection de (O_3) et d'une sphère qui coupe les quatre sphères données sous des angles égaux.

On voit aisément que, *lorsqu'on déplace a sur* (O), *le plan de cette circonférence passe par une droite fixe, et la polaire de cette droite, par rapport à* (O_3), *rencontre cette sphère aux points où celle-ci est touchée par deux des sphères demandées.*

ERRATA DES TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

Page 94, première colonne, placer 3" entre 2" et 4"

ÉTUDE DE DEUX SYSTÈMES SIMPLES DE COORDONNÉES TANGENTIELLES DANS LE PLAN : COORDONNÉES PARALLÈLES ET COORDONNÉES AXIALES

(FIN)

(Voir 3e série, t. III, p. 545)

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève-Ingénieur des Ponts et Chaussées.

IX. — EXPOSÉ D'UNE MÉTHODE DE TRANSFORMATION (1).

51. Si, dans les équations d'un problème traité en coordonnées rectangulaires, on remplace x et y par u et v, on tombera sur une proposition corrélative, en coordonnées parallèles.

Pour les propriétés descriptives, on retrouve les théorèmes que donne la méthode des polaires réciproques; nous ne nous y arrêterons pas. Mais la transformation des propriétés *segmentaires, angulaires* et *barycentriques* conduit à des particularités assez intéressantes que nous allons signaler.

Définitions et Principes.

52. Nous représenterons les points par des lettres majuscules, les droites par des minuscules. Un point sera parfois désigné par les noms de deux droites s'y coupant, et une droite par les noms de deux de ses points.

La lettre représentative $\left\{\begin{array}{l}\text{d'un point}\\ \text{d'une droite}\end{array}\right\}$, mise entre

(1) Cette méthode appartient à la famille des *transformations gauches réciproques* du premier degré.

parenthèses, désignera la courbe { engendrée / enveloppée } par { ce point / cette droite }.

Une courbe pourra être aussi considérée indépendamment { du point / de la droite } qui { l'engendre / l'enveloppe }; elle sera alors représentée par une lettre spéciale.

Les deux systèmes que nous allons comparer sont ainsi constitués :

Le système de coordonnées rectangulaires comprend un *point origine* O par où passent deux *axes coordonnés* rectangulaires x et y. Les x se comptent sur l'axe x, à partir de point O, les y sur l'axe y, à partir du point O.

Le système de coordonnées parallèles comprend un *axe origine* o sur lequel sont les *points coordonnés* X et Y.

Les u se comptent sur la perpendiculaire à l'axe o menée par le point Y, et à partir de ce point, les v sur la perpendiculaire à l'axe o menée par le point X, et à partir de ce point ([1]).

On a ainsi :

Coordonnées du point O	Coordonnées de l'axe o
$x = 0, \quad y = 0.$	$u = 0, \quad v = 0,$
Équation de l'axe x	Équation du point X
$y = 0.$	$v = 0.$
Équation de l'axe y	Équation du point Y
$x = 0.$	$u = 0.$

([1]) Il semble naturel, au premier abord, d'accoupler, d'après l'ordre alphabétique, la lettre u avec la lettre X et la lettre v avec la lettre Y; mais, pour que le point coordonné X soit corrélatif de l'axe coordonné x, il faut que son équation soit corrélative de celle de cet axe, qui est $y = 0$; l'équation du point X doit donc être $v = 0$, c'est-à-dire que les v doivent se compter à partir de X, et, par suite, les u à partir de Y.

Au point A défini par x_1 et y_1 correspondra la droite a pour laquelle $u_1 = x_1$ et $v_1 = y_1$.

Droite divisant le système de deux autres dans un rapport donné.

53. Si, sur la droite qui joint deux points donnés A et B, nous prenons un point P, tel que $\frac{PA}{PB} = k$ (le paramètre k portant son signe), nous disons que le point P divise le segment AB dans le rapport k, et si (x_1, y_1) (x_2, y_2) sont les coordonnées rectangulaires des points A et B, les coordonnées rectangulaires du point P seront

$$x' = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \quad y' = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}.$$

Prenons maintenant deux droites $a(u_1, v_1)$ et $b(u_2, v_2)$, rapportées à notre système de coordonnées parallèles, et coupons-les par une parallèle aux droites Yu et Xv; soient A le point où cette droite coupe a, B le point où elle coupe b; prenons le point P qui divise le segment AB dans le rapport k; lorsque l'on fera varier la droite AB, en la laissant parallèle à Yu, le point P engendrera une droite p qui passera par le point de concours des droites a et b et dont les coordonnées seront précisément

$$u' = \frac{u_1 - ku_2}{1 - k}, \quad v' = \frac{v_1 - kv_2}{1 - k}.$$

Aussi, par analogie avec ce qui précède, dirons-nous que *la droite p divise le système (ab) dans le rapport* k et exprimerons-nous ce fait par l'égalité $\left(\frac{pa}{pb}\right) = k$.

Dès lors, nous voyons que, *si le point* P *divise le segment* AB *dans le rapport k, la droite p corrélative de* P *divise le système (ab) corrélatif de* AB *dans le même rapport.*

Ce principe renferme toute la transformation des propriétés segmentaires.

En particulier, si $k = -1$, le point P est le *milieu du segment* AB ou le *point moyen des points* A *et* B, et de même la droite p sera dite *médiane du système* (ab) ou *droite moyenne des droites a et b.*

Points parallèles.

51. Prenons maintenant, en coordonnées rectangulaires, la droite a dont l'équation est

$$y = mx + n.$$

Le coefficient m, égal à la tangente de l'angle que fait la droite a avec l'axe x, définit la direction de cette droite, c'est-à-dire que toutes les droites qui correspondent à une même valeur de M concourent en un même point de la droite à l'infini du plan; ces droites sont dites parallèles.

Soit alors A le point corrélatif, dont l'équation en coordonnées parallèles est

$$v = mu + n.$$

D'après ce que nous avons vu en traitant de l'équation du point (nº 11), si nous menons par le point A une parallèle à Xv, qui coupe l'axe o au point A', nous avons

$$m = \frac{A'X}{A'Y};$$

par suite, tous les points qui correspondent à une même valeur de m sont distribués sur une même parallèle aux droites Yu et Xv; nous dirons par analogie que ces points sont *en relation de parallélisme* ou plus simplement *parallèles* ([1]).

([1]) Cette définition et celles qui suivent n'ont d'autre objet que d'abréger le langage dans le cours du présent travail.

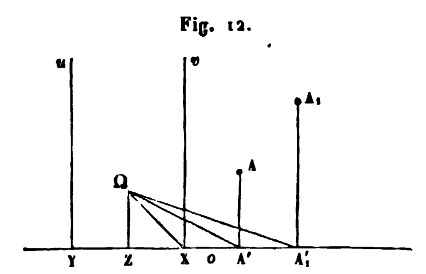
Si donc on veut déterminer sur une droite donnée le point parallèle d'un point donné, on prendra l'intersection de la droite et de la parallèle à $X v$ menée par le point.

Module angulaire d'un point.

55. Il ne suffisait pas, pour pouvoir transformer les propriétés angulaires des systèmes de droites, de voir (ce qui d'aillleurs ne présentait pas la moindre difficulté) quelle était, en coordonnées parallèles, la relation entre les points équivalente au parallélisme entre les droites : il fallait encore reconnaître quel élément commun à deux points répondait à l'angle de deux droites, afin de pouvoir étendre aux systèmes de points les relations d'angles établies pour les systèmes de droites ; cette dernière recherche présente au premier abord quelque difficulté ; mais nous croyons qu'elle devient des plus aisées par l'introduction de l'élément que nous appelons le *module angulaire d'un point.*

56. Voici comment nous définissons cet élément (*fig.* 12) :

Fig. 12.



Étant donné le point A dont l'équation est

$$v = mu + n,$$

prenons le point parallèle A′ situé sur l'axe *o*; nous avons

$$m = \frac{A'X}{A'Y}.$$

Par le milieu Z de XY menons une parallèle à Y*u* et X*v* et prenons sur cette droite la longueur

$$Z\Omega = ZX = \frac{XY}{2};$$

l'égalité précédente peut s'écrire

$$m = \frac{A'Z - XZ}{A'Z + ZY} = \frac{A'Z - Z\Omega}{A'Z + Z\Omega} = \frac{\frac{A'Z}{Z\Omega} - 1}{\frac{A'Z}{Z\Omega} + 1} = \frac{\operatorname{tang} A'\Omega Z - 1}{\operatorname{tang} A'\Omega Z + 1};$$

mais, $\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}$ étant égal à 1, on peut aussi bien écrire

$$m = \frac{\operatorname{tang} A'\Omega Z - \operatorname{tang}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tang} A'\Omega Z \operatorname{tang}\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tang}\left(A'\Omega Z - \frac{\pi}{4}\right);$$

or, ZΩ étant égal à ZX, l'angle XΩZ est égal à $\frac{\pi}{4}$; par suite,

$$m = \operatorname{tang} A'\Omega X.$$

Cet angle A′ΩX, qui est le même pour tous les points de la droite AA′, c'est-à-dire pour tous les points parallèles à A, sera dit *module angulaire* de ces points.

Le point Ω, qui est invariable, recevra le nom de *pôle* du système de coordonnées parallèles considéré, et la droite ΩX, également fixe, celui d'*axe polaire* de ce système.

De ces définitions résulte la règle suivante : pour avoir le *module angulaire* d'un point donné A, il faut prendre, sur l'axe *o*, le point parallèle A′, et le joindre au *pôle* Ω; l'angle que la droite ΩA′ fait avec l'*axe polaire* ΩX est précisément le *module angulaire* cherché.

On voit, en outre, que le module angulaire d'un point est égal à l'angle que fait avec l'axe x la droite corrélative, en coordonnées rectangulaires.

Angle de deux points.

57. Soient A et A_1 (*fig.* 12) deux points dont les équations respectives sont

$$v = mu + n$$

et

$$v = m_1 u + n_1.$$

Prenons sur l'axe o les points A' et A'_1, parallèles aux deux premiers. L'angle $A'\Omega A'_1$ est égal à la différence des modules angulaires des deux points, et nous avons

$$\operatorname{tang} A'\Omega A'_1 = \frac{m_1 - m}{1 + mm_1}.$$

Nous appellerons cet angle $A'\Omega A'_1$ *angle des points* A *et* A_1.

Pour tous les points situés sur une même parallèle aux axes Xv et Yu, cet angle est nul. Il est le même pour deux points quelconques pris respectivement sur deux parallèles fixes aux axes Xv et Yu.

Si nous prenons maintenant en coordonnées rectangulaires les droites dont les équations sont

$$y = mx + n,$$
$$y = m_1 x + n_1,$$

l'angle de ces deux droites nous est donné par

$$\operatorname{tang} V = \frac{m_1 - m}{1 + mm_1}.$$

Nous voyons donc que *l'angle de deux points, en coordonnées parallèles, est égal à l'angle des deux droites corrélatives en coordonnées rectangulaires.*

58. Ce théorème nous permettra de transformer les théorèmes, établis en coordonnées rectangulaires, où entrent des relations d'angles. Nous le compléterons par la remarque suivante :

Si les points A *et* A_1 *se déplacent d'une manière quelconque dans le plan, mais en conservant un angle constant, les points* A′ *et* A'_1 *marquent sur l'axe o des divisions homographiques.*

En effet, θ étant l'angle constant des points A et A_1, on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\dfrac{ZA'_1}{\Omega Z} - \dfrac{ZA'}{\Omega Z}}{1 + \dfrac{ZA'_1 \times ZA'}{\Omega Z^2}},$$

ou, en représentant le segment de longueur constante ΩZ par δ,

$$ZA' \times ZA'_1 - \frac{\delta}{\operatorname{tang}\theta} A'A'_1 + \delta^2 = 0,$$

ce qui démontre le théorème. De plus, le terme constant δ^2 étant indépendant de l'angle θ, on voit que les points doubles des divisions homographiques, correspondant aux diverses valeurs de θ, sont fixes; ces points sont d'ailleurs imaginaires.

59. Supposons que les points A et A_1 se déplacent sur une droite, la propriété homographique étant projective, ces points détermineront également sur cette droite deux divisions homographiques. D'ailleurs les droites corrélatives de ces points passeront par un point fixe; on peut donc énoncer le théorème suivant :

Si, en coordonnées rectangulaires, on a deux systèmes de droites $a, b, c, \ldots, a_1, b_1, c_1, \ldots,$ *issues d'un même point* P, *et telles que les droites correspon-*

dantes a et a_1, b et b_1, c et c_1, ... fassent un angle constant, on aura corrélativement, en coordonnées parallèles, deux divisions A, B, C, ..., A_1, B_1, C_1, ..., *situées sur une même droite p et qui seront en homographie.*

On peut encore dire :

Si un angle constant de côtés a et b tourne autour de son sommet P, *les points corrélatifs* A *et* B *des droites a et b marquent sur la droite p corrélative du point* P *deux divisions homographiques.*

De tout ce qui précède résulte un moyen de transformer les propriétés angulaires relatives à un système de droites quelconques situées dans un plan, et d'en déduire des propriétés homographiques lorsque ces droites passent par un même point.

Points perpendiculaires.

60. Si nous supposons que l'angle de deux points, défini comme il vient d'être fait, soit droit, nous dirons que ces points sont en *relation de perpendicularité* ou plus simplement *perpendiculaires*.

Remarquons que ce genre de relation entre deux points dépend essentiellement du choix des axes de coordonnées.

Soient A et A_1 deux points perpendiculaires quelconques, A′ et A'_1 les points parallèles aux premiers, qui sont situés sur l'axe o; la relation homographique, établie plus haut, qui lie les points A′ et A'_1, devient dans ce cas

$$ZA' \times ZA'_1 + \delta^2 = 0,$$

c'est-à-dire que *ces points sont en involution.*

Le point Z est le point central de cette involution.

61. Pour trouver sur une droite d le point perpendiculaire à un point donné A, voici comment on procédera : prendre sur l'axe o le point A′ parallèle à A, et, dans l'involution qui vient d'être définie, le conjugué B′ de A′, prendre enfin sur la droite d le point B parallèle à B′, en tirant BB′ parallèlement à Xv et Yu; le point B sera le point cherché.

Pour déduire, dans cette construction, le point B′ du point A′, il suffit de joindre le point A′ au pôle Ω du système, et de mener par le point Ω une perpendiculaire ΩB′ à ΩA′ jusqu'à sa rencontre B′ avec l'axe o.

62. Comme précédemment, on voit que, *si un angle droit de côtés a et b tourne autour de son sommet* P, *les points* A *et* B, *corrélatifs des droites a et b, marquent sur la droite p, corrélative du point* P, *deux divisions en involution.*

Remarques sur la transformation des coniques.

63. Si, dans l'équation en coordonnées rectangulaires d'une conique Γ, on remplace x et y par u et v, on obtient l'équation de la conique corrélative Γ_1, en coordonnées parallèles.

A chaque point de la conique Γ correspond naturellement une tangente de la conique Γ_1 et réciproquement. Si sur une tangente à la conique Γ_1 on prend le point perpendiculaire au point de contact, on a l'élément corrélatif de la normale à la conique Γ; aussi ce point sera-t-il dit *point normal.*

Aux asymptotes de Γ correspondent dans Γ_1 les points de contact des tangentes parallèles à Xv et Yu; nous appellerons ces points les *points asymptotes.*

Aux foyers de Γ correspondent pour Γ_1 deux droites, dépendant, bien entendu, du choix des axes, et telles

que leurs points d'intersection (imaginaires) avec cette conique sont respectivement parallèles aux points qui divisent le segment XY dans les rapports

$$\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad -\sqrt{-1}.$$

Nous appellerons ces droites les *droites focales*.

Soit d une droite qui coupe la conique Γ aux points A et B; du point D, corrélatif de d, partiront deux droites a et b, corrélatives de A et B, et qui seront tangentes à la conique Γ_1; lorsque la droite d se déplacera parallèlement à elle-même, le point D se déplacera sur une parallèle à Yu, et, comme le milieu du segment AB décrira une droite d', la droite moyenne du système (ab) passera par un point fixe D'.

Le point D', ainsi obtenu corrélativement du diamètre d', sera dit *point diamétral.*

Tous les diamètres d' passant par le centre de Γ, tous les points diamétraux D' seront sur une même droite, dite *droite centrale,* dont les coordonnées seront données par le système d'équations $F'_u = 0$, $F'_v = 0$.

A deux diamètres conjugués de Γ correspondent deux *points diamétraux conjugués* de Γ_1. Les deux points diamétraux de Γ_1, qui sont entre eux à angle droit, sont corrélatifs des axes de Γ, et recevront pour cette raison le nom de *points axiaux*.

64. Nous nous arrêterons là de ces analogies; on voit qu'il est très aisé, étant donné un élément quelconque de la conique Γ, de trouver l'élément corrélatif de la conique Γ_1.

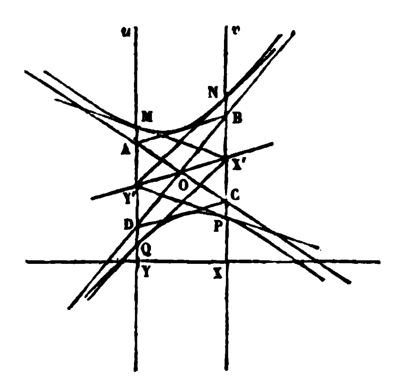
65. Disons un mot maintenant des coniques représentées, en coordonnées parallèles, par certaines équations simplifiées de coniques en coordonnées rectangulaires, après remplacement de x et y par u et v.

66. Prenons l'équation corrélative de celle du cercle en coordonnées rectangulaires

$$(u-a)^2+(v-b)^2=c^2;$$

elle représente une hyperbole (*fig.* 13) dont le centre O est à la rencontre de la droite équidistante de Yu et Xv,

Fig. 13.



et de la droite X'Y' dont les coordonnées sont $u=a$, $v=b$: cette droite X'Y' est la *droite centrale* de l'hyperbole. Portant sur les axes de coordonnées, de part et d'autre de X'Y', les segments

$$Y'A = Y'D = X'B = X'C = \frac{c}{\sqrt{2}},$$

on détermine les asymptotes AC et BD; les droites AB et CD sont tangentes à l'hyperbole; si cette courbe coupe les axes aux points M, N, P, Q, on a

$$Y'M = Y'Q = X'N = X'P = c;$$

les tangentes en M et en Q passent par le point X', les tangentes en N et en P par le point Y'.

Nous désignerons, en raison de leur équation, les hyperboles ainsi placées par rapport aux axes, sous le

nom d'*hyperboles corrélatives de cercles*, et nous pourrons dire d'une manière générale qu'*une hyperbole corrélative de cercle est une hyperbole telle que les axes* Y*u et* X*v soient tangentes à son hyperbole complémentaire.*

De même que trois conditions suffisent à déterminer un cercle, trois conditions suffisent à déterminer une hyperbole corrélative de cercle. En particulier, il n'existe qu'une hyperbole corrélative de cercle inscrite à un triangle.

67. Prenons maintenant l'équation

$$v^2 - u^2 = a^2,$$

dont la corrélative, en coordonnées rectangulaires, représente une hyperbole équilatère rapportée à ses axes. On voit, toujours en appliquant les règles du Chapitre IV, que cette équation représente une parabole ayant son axe dirigé suivant XY, son sommet situé au milieu du segment XY, et qui coupe l'axe Xv en des points M et N tels que XM = XN = a.

Il résulte de là que, si la distance XY des points origines est égale à $2a$, le point X est foyer de la parabole.

68. Enfin, l'équation corrélative de l'équation réduite de la parabole $y^2 = 2px$, c'est-à-dire

$$v^2 = 2pu,$$

représente une hyperbole tangente à XY au point Y et ayant pour asymptotes d'une part l'axe Xv, de l'autre la droite dont les coordonnées sont $u = \frac{p}{2}$, $v = p$. Nous avons déjà vu, d'ailleurs (n° 25), que la courbe en u et v pour laquelle $B^2 - AC = 0$, c'est-à-dire qui est

corrélative de la parabole, est une hyperbole ayant une asymptote parallèle à X*v* et Y*u*.

Nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet et nous allons passer maintenant aux applications (1).

X. — Applications.

Transformations des propriétés segmentaires.

69. Prenons d'abord ce théorème:

Deux droites parallèles sont coupées par trois droites* AA′, BB′, CC′, *l'une aux points* A, B, C, *l'autre aux points* A′, B′, C′; *si l'on a

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'},$$

les trois droites* AA′, BB′, CC′ *concourent en un même point.

69′. Théorème corrélatif :

***Deux points parallèles* (n° 54) *sont joints à trois points aa′, bb′, cc′, l'un par les droites a, b, c, l'autre par les droites a′, b′, c′; si l'on a* (n° 53)**

$$\left(\frac{ab}{a'b'}\right)=\left(\frac{ac}{a'c'}\right),$$

les points aa′, bb′, cc′ sont en ligne droite.

70. Soit maintenant le théorème de Ménélaüs :

Les côtés* AB, BC, CA *d'un triangle étant coupés respectivement aux points* M, N, P *par une droite quelconque, on a

$$\frac{MA}{MB}\,\frac{NB}{NC}\,\frac{PC}{PA}=-1,$$

70′. Théorème corrélatif :

***Les sommets ab, bc, ca d'un triangle étant joints respectivement par les droites m, n, p à un point quelconque, on a* (n° 53)**

$$\left(\frac{ma}{mb}\right)\left(\frac{nb}{nc}\right)\left(\frac{pc}{pa}\right)=-1.$$

71. Théorème de Jean de Céva :

On joint les sommets* A, B, C *d'un triangle à un point quelconque; les droites ainsi menées

71′. Théorème corrélatif :

On coupe les côtés a, b, c d'un triangle par une droite quelconque; les points ainsi obtenus déter-

---

(1) Dans les applications qui suivent, on trouvera, à côté de théorèmes nouveaux, d'autres propriétés connues; mais notre but n'est ici que de bien mettre en relief l'esprit de la méthode.

déterminant sur les côtés opposés respectivement les points M, N, P, *on a*

$$\frac{MB}{MC}\,\frac{NC}{NA}\,\frac{PA}{PB} = 1.$$

Corollaire :

Les médianes (droites qui joignent les sommets aux milieux des côtés opposés) concourent au même point.

72. Prenons maintenant ce théorème :

Dans une conique, le point de contact d'une tangente quelconque est le milieu du segment déterminé par les points où cette tangente coupe les asymptotes.

minant avec les sommets oppo-sés respectivement les droites m, n, p, on a (n° 53)

$$\left(\frac{mb}{mc}\right)\left(\frac{nc}{na}\right)\left(\frac{pa}{pb}\right) = 1.$$

Corollaire :

Les points d'intersection des côtés et des droites moyennes (n° 53) *des systèmes de côtés opposés sont en ligne droite* [1].

72'. Théorème corrélatif :

Dans une conique, la tangente en un point quelconque est la droite moyenne (n° 53) *du système formé par les droites qui joignent ce point aux points asymptotiques* (n° 63).

Nous placerons ici une remarque : les définitions que nous avons posées sont fort utiles pour opérer ces déductions corrélatives de théorèmes connus, mais les énoncés qui en résultent peuvent être modifiés en remontant au sens contenu dans ces définitions. Ainsi le théorème précédent deviendra :

On joint un point quelconque M *d'une conique aux extrémités* A *et* B *d'un diamètre de cette conique; le point que la tangente en* M *détermine sur une droite de direction conjuguée à la direction* AB *est le milieu*

---

[1] Ce théorème peut s'énoncer ainsi : *Un triangle détermine sur une transversale quelconque, trois segments; les milieux de ces segments sont joints aux sommets opposés dans le triangle, par des droites qui donnent trois points sur le périmètre de ce triangle. Ces trois points sont en ligne droite.* La démonstration directe de ce théorème est très facile.

du segment déterminé sur cette droite par les droites MA *et* MB.

73. Prenons encore ce théorème :

Une droite quelconque coupe une conique en deux points; en ces points on mène les tangentes à la conique; ces tangentes déterminent sur l'une des asymptotes un segment dont le milieu est sur la droite donnée.

73'. Théorème corrélatif :

Par un point quelconque on mène deux tangentes à une conique; les points de contact de ces tangentes joints à l'un des points asymptotes (n° 63) *forment un système de deux droites dont la droite moyenne passe par le point donné.*

Ce dernier théorème corrélatif peut s'interpréter ainsi :

D'un point M *on mène à une conique les tangentes* MP *et* MQ *qui touchent cette conique aux points* P *et* Q ; *on joint les points* M, P *et* Q *à un point quelconque* A *de la conique; une droite, de direction conjuguée à la direction du diamètre qui passe au point* A, *coupe les droites* AM, AP, AQ *respectivement aux points* M', P', Q'; *le point* M' *est le milieu du segment* P'Q'.

Autrement dit : *Les droites* AP, AM, AQ *et la tangente à la conique au point* A *forment un faisceau harmonique.*

Si l'on suppose que le point M s'éloigne à l'infini, on retombe sur le théorème énoncé plus haut.

Ces quelques exemples suffisent à montrer comment s'opère la transformation des propriétés segmentaires; passons maintenant aux propriétés angulaires.

Transformation des propriétés angulaires.

74. Nous rappellerons en commençant que nous nommons *point normal* à une courbe pour une tangente

donnée le point, pris sur cette tangente, qui est perpendiculaire au point de contact. Le point normal est corrélatif de la normale. La courbe qu'il décrit est corrélative de la développée et, par suite, la tangente à cette courbe corrélative du centre de courbure.

Voyons maintenant quelques exemples de transformations :

75. Théorème des trois hauteurs :

Les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur les côtés opposés concourent au même point.

75'. Théorème corrélatif :

Les points pris sur les trois côtés d'un triangle et qui sont perpendiculaires (n° 60) *aux sommets opposés sont en ligne droite.*

Nous appellerons ces points *points hauteurs.*

76. Théorème :

Toutes les normales à un cercle passent par le centre de ce cercle.

76'. Théorème corrélatif :

Tous les points normaux (n° 74) *à une hyperbole corrélative du cercle* (n° 66) *sont sur la ligne centrale* (n° 63) *de cette hyperbole.*

77. Théorème :

Si deux droites variables tournant chacune autour d'un point fixe sont constamment à angle droit, leur point de rencontre décrit un cercle.

Le centre de ce cercle est le milieu du segment qui joint les deux points fixes.

77'. Théorème corrélatif :

Si deux points variables décrivant chacun une droite fixe sont constamment à angle droit (n° 60) *la droite qui les joint enveloppe une hyperbole corrélative de cercle* (n° 66).

La ligne centrale de cette hyperbole est la droite moyenne du système formé par les deux droites fixes.

78. Théorème :

Les perpendiculaires élevées aux trois côtés d'un triangle par les milieux de ces côtés se cou-

78'. Théorème corrélatif :

Les points perpendiculaires aux trois sommets d'un triangle et qui sont pris sur les droites moyennes

vent en un même point qui est le centre du cercle circonscrit.

79. Théorème :

Les pieds des hauteurs d'un triangle, sur les trois côtés, et les milieux de ces côtés sont sur un même cercle.

Ce cercle est le *cercle des neuf points;* on sait quels sont tous les points remarquables, en assez grand nombre, qu'il contient.

80. Théorème de Simson :

On prend un point M *sur le cercle* (M) *circonscrit à un triangle, de ce point on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés du triangle; les pieds de ces perpendiculaires sont sur une droite d.*

Si les points M *et* M_1 *sont tels que le centre du cercle* (M) *soit le milieu du segment* MM_1, *les droites correspondantes d et* d_1 *sont perpendiculaires.*

La courbe décrite par le point de rencontre des droites perpendiculaires d et d_1, *lorsque les points* M *et* M_1 *se déplacent sur le*

des systèmes formés par les côtés se croisant en ces sommets sont sur une même droite qui est la ligne centrale de l'hyperbole, corrélative de cercle, inscrite (n° 66, dernier alinéa).

79'. Théorème corrélatif :

Les droites qui joignent les points hauteurs (n° 77') *d'un triangle aux sommets opposés et les droites moyennes des systèmes de droites formés par les côtés pris deux à deux sont tangentes à une même hyperbole corrélative de cercle.*

Cette hyperbole, que nous appellerons *hyperbole des neuf droites,* est tangente à toutes les droites corrélatives des points remarquables situés sur le cercle des neuf points.

80'. Théorème corrélatif :

On prend une tangente m à l'hyperbole corrélative de cercle (m) inscrite à un triangle; sur cette tangente, on prend les points perpendiculaires aux trois sommets du triangle et on les joint respectivement à ces sommets par des droites; ces trois droites concourent en un même point D.

Si les droites m et m_1 *sont telles que la ligne centrale de l'hyperbole (m) soit la droite moyenne du système* (mm_1), *les points correspondants* D *et* D_1 *sont perpendiculaires.*

La courbe enveloppée par la

cercle (M), *est le cercle des neuf points du triangle donné* [1].

droite qui joint les points perpendiculaires D *et* D_1, *lorsque les droites* m *et* m_1 *se déplacent tangentiellement à l'hyperbole* (H), *est l'hyperbole des neuf droites du triangle donné.*

81. Théorème de Frégier :

Deux droites perpendiculaires d *et* d' *tournent autour d'un point* M *pris sur une conique ; ces droites coupent respectivement la conique aux points* P *et* P' : *la droite* PP' *passe par un point fixe situé sur la normale à la conique au point* M.

81'. Théorème corrélatif :

Deux points perpendiculaires D *et* D' *se déplacent sur une tangente* m *à une conique; de ces points on mène à la conique les tangentes* p *et* p' ; *le point* pp' *décrit une droite qui passe par le point normal* (n° 76) *à la conique situé sur la tangente* m.

La réciproque de ce théorème corrélatif peut, en vertu d'une remarque qui a été faite plus haut, s'énoncer ainsi :

Les tangentes à une conique, issues des différents points d'une droite, marquent sur une tangente quelconque à cette conique des points en involution. Dans cette involution, le point de rencontre de la droite et de la tangente considérée est conjugué du point de contact de la tangente. C'est une propriété connue.

Le théorème qui termine le n° 34 est un cas particulier du précédent, lorsqu'on prend la tangente parallèlement à la droite donnée.

82. Théorème :

Les trois hauteurs d'un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère se coupent en un même point de cette courbe.

82'. Théorème corrélatif :

Les trois points hauteurs d'un triangle circonscrit à une conique dont les points asymptotes sont perpendiculaires sont situés sur une même tangente à la courbe.

---

[1] Ces deux derniers théorèmes ont été proposés comme Questions dans les *Nouvelles Annales* (3e série, t. II, p. 479, Question 1473).

Nous pourrions multiplier ces exemples de transformation des propriétés angulaires au moyen de notre méthode ; mais nous pensons en avoir assez dit sur ce sujet.

Note sur la transformation des propriétés barycentriques.

83. Nous avons déjà donné des exemples de cette transformation au Chapitre V. Nous demanderons la permission de faire sur ce sujet une petite remarque.

La droite que nous avons appelée *moyenne* d'un système de droites (n° 5) peut recevoir une définition géométrique indépendante du système spécial de coordonnées que nous envisageons ; la voici :

La droite moyenne, par rapport à une direction donnée d'un système de droites situées d'une manière quelconque dans un plan, est le lieu du centre des moyennes distances des points où les droites données sont coupées par une sécante parallèle à la direction donnée.

Les coordonnées parallèles permettront évidemment de déduire toutes les propriétés de cet élément géométrique des propriétés établies en coordonnées ordinaires pour le centre de gravité d'un système de points.

84. Un seul exemple, joint à ceux qui ont déjà été donnés (n° 37), suffira à faire comprendre la manière d'opérer cette transformation.

Coordonnées rectangulaires :	Coordonnées parallèles :
Quand un triangle se déplace en restant inscrit dans une conique et circonscrit à une parabole, son centre de gravité décrit une ligne droite.	*Quand un triangle se déplace en restant circonscrit à une conique et inscrit dans une hyperbole ayant une asymptote parallèle à* Yu *et* Xv [1], *la droite moyenne de ses trois côtés passe par un point fixe.*

[1] Voir n° 68.

Ce théorème corrélatif pourra s'énoncer plus simplement :

Quand un triangle se déplace en restant circonscrit à une conique et inscrit dans une hyperbole H, *la droite moyenne de ses trois côtés, relativement à l'une ou l'autre des directions asymptotiques de l'hyperbole* H, *passe par un point fixe.*

85. On voit qu'on a ainsi un moyen d'obtenir sans calcul une série de théorèmes intéressants.

C'est, en particulier, par cette méthode que nous sommes arrivé à tous les théorèmes donnés sans démonstration dans notre Note *Sur la droite moyenne d'un système de droites* ([1]). Nous avons, dans les transformations qui nous ont conduit à ces théorèmes, fait usage de plusieurs des principes qui viennent d'être exposés. Aussi renverrons-nous le lecteur à ce travail.

Résumé.

86. La méthode qui vient d'être développée permet, étant donnée une propriété *segmentaire, angulaire* ou *barycentrique* quelconque, d'en déduire immédiatement et sans calcul une propriété corrélative. Nous avons vu, en outre, quelles étaient les remarques qui permettaient de traduire l'énoncé de ces théorèmes en faisant abstraction de la considération des coordonnées parallèles qui auraient servi à les obtenir.

([1]) *Bulletin de la Société mathématique,* t. XII, p. 114.

QUELQUES RÉFLEXIONS SUR L'ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES COURBES GÉOMÉTRIQUES ET THÉORÈMES POUVANT Y ÊTRE UTILES

(SUITE);

PAR M. J.-E. ESTIENNE.

RÉFLEXIONS ET THÉORÈMES SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE OU QUADRIQUES.

On a essayé vainement de trouver, au moyen de théorèmes analogues à ceux qui précèdent, une relation graphique symétrique entre dix points d'une quadrique.

Les travaux de M. P. Serret ont donné le moyen de constater graphiquement que dix points sont sur une quadrique; un grand progrès a été ainsi réalisé; mais on ne peut s'empêcher de regretter la complication et le manque de symétrie des constructions. Il est difficile, par suite de cette dissymétrie, d'embrasser ces constructions d'un coup d'œil, pour les utiliser avec précision dans les investigations ultérieures.

Tous les théorèmes qui permettent de reconnaître qu'un point est sur une courbe ou sur une surface définie par un nombre convenable de points s'équivalent théoriquement; chacun d'eux constitue, comme on l'a dit déjà, une équation géométrique de la courbe ou de la surface. Dans l'application, on s'adressera à l'une ou à l'autre des formes de cette équation, plus commode dans le cas particulier; mais l'avantage de l'élégance et de la fécondité est certainement à l'énoncé *symétrique,* c'est-à-dire dans lequel tous les points donnés entrent de la même manière.

On a donné, par exemple, un grand nombre de formes à l'équation géométrique des coniques, entre autres les suivantes :

Le théorème de Pascal ;

Le théorème de Desargues ;

Le théorème de Chasles, sur la constance du rapport anharmonique du faisceau dont le centre est sur une conique et dont les rayons passent par quatre points fixes de cette conique.

Tous ces théorèmes peuvent servir à étudier les coniques ; mais quel est celui qui a été toujours regardé comme le plus beau, le plus élégant, le plus séduisant ? C'est le seul d'entre eux qui soit symétrique, le puissant théorème de Pascal.

Cette symétrie, objet des vœux du géomètre, l'analyste la rencontre naturellement et sans effort, mais aussi sans grand profit, en écrivant le déterminant qui, égalé à o, exprime que $\frac{n(n+3)}{2}+1$ points sont sur une courbe d'ordre n.

Les géomètres qui ont cherché l'analogue du théorème de Pascal pour les quadriques ont remarqué très justement qu'on doit trouver trois théorèmes de l'espace correspondant à l'unique théorème de Pascal dans le plan.

Le premier exprimerait que dix points sont sur une quadrique ;

Le second, que neuf points sont sur une courbe gauche du quatrième ordre (intersection de deux quadriques) ;

Le troisième, que huit points sont septaires. (Nous exprimerons, par cette locution abrégée, que les huit points sont tels que toute quadrique, passant par sept d'entre eux, passe par le huitième.)

Le premier de ces théorèmes qui exprime qu'une condition simple est satisfaite a très probablement la forme suivante : *Si dix points sont sur une quadrique, quatre certains points qui s'en déduisent sont dans un même plan, ou bien quatre certains plans qui s'en déduisent passent par un même point.*

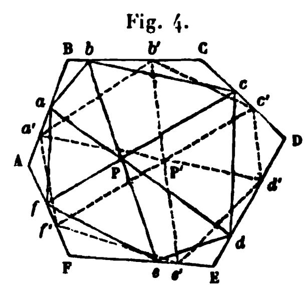
Le second exprimerait de même la condition double que son énoncé suppose satisfaite (un point situé sur une courbe déterminée) par le fait que trois points sont en ligne droite, ou que trois plans passent par une même droite.

Quant au troisième théorème, le seul que nous ayons complètement résolu, il doit permettre de trouver le huitième point commun à toutes les quadriques passant par sept points donnés. Comme la détermination du point exige trois conditions, il doit exprimer une condition triple; par exemple, et c'est ce qui a lieu, que quatre droites sont sur un hyperboloïde.

Parmi les formes connues de ce troisième théorème, la plus élégante est, je crois, la suivante, due à un illustre géomètre, M. Hesse :

Théorème de Hesse. — *Si huit points* A, B, C, D, E, F, P, P′ *sont septaires, en formant l'hexagone gauche*

Fig. 4.



ABCDEF, *et menant par le point* P *les trois droites qui coupent les côtés opposés de cet hexagone aux points*

a, b, c, d, e, f, qu'on prend pour sommets successifs d'un nouvel hexagone, les côtés de cet hexagone et ceux de l'hexagone analogue qu'on obtiendrait en partant du point P′ sont douze génératrices d'un même hyperboloïde (*fig.* 4).

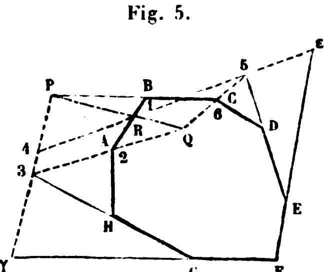
Ce remarquable théorème laisse à désirer, en ce sens qu'il manque de symétrie, qu'il conduit à une construction difficile du huitième point, et enfin qu'il n'est pas l'analogue d'un théorème sur les coniques.

Nous proposerons le théorème suivant, symétrique et d'une analogie flagrante avec le théorème de Pascal :

Théorème. — *Si les huit sommets d'un octogone gauche sont septaires, ses faces opposées se coupent en quatre droites, qui sont des génératrices d'un même hyperboloïde* (*fig.* 5).

Soit ABCDEFGH l'octogone gauche; il est facile de voir qu'il suffit de démontrer que l'une quelconque de

Fig. 5.



ses faces, ABC par exemple, coupe en trois points en ligne droite les intersections des trois groupes de faces opposées :

BCD et FGH (point P),
CDE et GHA (point Q),
DEF et HAB (point R).

Les points P, Q, R qu'on veut prouver être en ligne droite s'obtiennent de la façon suivante :

On prolonge les quatre côtés de l'octogone DE, EF, FG, GH jusqu'à leurs points d'intersection 5, ε, γ, 3 avec la face ABC;

P est alors l'intersection des droites 3γ et BC;

Q est l'intersection des droites A3 et C5;

R est l'intersection des droites 5ε et AB.

Appelons 4 l'intersection des droites 3γ et 5ε, et désignons A par 2, B par 1, C par 6.

On voit, en considérant la figure, que les points P, Q, R sont à l'intersection des côtés opposés de l'hexagone-plan 123456.

R est l'intersection de 12 avec 45;

Q est l'intersection de 23 avec 56;

P est l'intersection de 34 avec 61.

Le théorème sera donc démontré si l'on prouve que cet hexagone 123456 est inscrit à une conique.

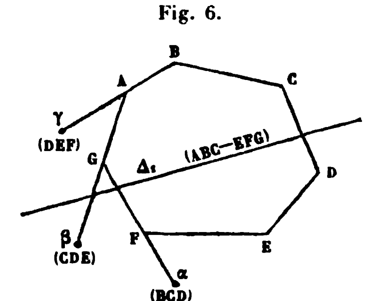
Or, dire que les huit sommets de l'octogone sont septaires revient à dire qu'on peut, par ces huit sommets et deux points quelconques de l'espace, faire passer une quadrique; en particulier, ces huit sommets et deux côtés quelconques de l'octogone sont sur une même quadrique.

Considérons la quadrique qui passe par ces huit sommets et par les côtés DE et GH. Cette quadrique coupe le plan ABC suivant une conique qui passe par les cinq points 1, 2, 3, 5, 6. Elle passe aussi par le point 4, car ce point 4 est, par construction, l'intersection du plan ABC avec la droite qui passe par le point F et rencontre les droites DE et HA. Cette droite, étant menée par un point de la quadrique considérée et rencontrant deux génératrices de cette quadrique, en est elle-même une génératrice, et le théorème est démontré.

Voyons à quelle construction conduit ce théorème pour la détermination du huitième point :

Soient A, B, C, D, E, F, G sept points quelconques

Fig. 6.



dans l'espace; on veut trouver le huitième point H par où passent toutes les quadriques menées par les sept points donnés (*fig.* 6).

Cherchons à déterminer les quatre droites qui figurent dans l'énoncé précédent. L'une d'elles, la droite Δ_1, intersection des plans ABC et EFG, est complètement déterminée.

Quant aux trois autres, intersections des plans

BCD	et	FGH	(Δ_2),
CDE	et	GHA	(Δ_3),
DEF	et	HAB	(Δ_4),

on connaît de chacune d'elles un point, et un plan dans lequel elle se trouve :

La droite Δ_2 est dans le plan BCD et passe par le point α où le côté FG de l'heptagone ABCDEFG coupe la face opposée BCD. De même, Δ_3 passe par β et est dans le plan CDE, et Δ_4 passe par γ et est dans le plan DEF.

Le problème sera résolu si l'on détermine complètement ces trois droites par la condition qu'elles soient,

avec la droite Δ_1, quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde. Le point H sera, en effet, à l'intersection de trois plans menés respectivement par les droites

$$\Delta_2 \text{ et } FG,$$
$$\Delta_3 \text{ et } GA,$$
$$\Delta_4 \text{ et } AB.$$

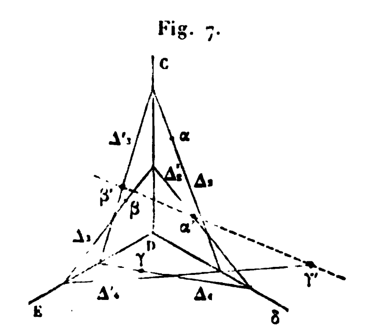
On voit aisément que ce problème n'est autre que le suivant :

On considère les trois faces de l'heptagone qui se coupent en D; on prend leurs intersections α, β, γ avec les côtés opposés de l'heptagone; mener par ces trois points un hyperboloïde tangent à ces trois faces, et admettant pour génératrice la droite Δ_1, intersection des plans ABC et EFG.

Il faut ajouter que la génératrice Δ_1 et les génératrices Δ_2, Δ_3, Δ_4 passant respectivement par les points α, β, γ et situées dans les plans tangents sont d'un même système.

Or soient (*fig.* 7) DCEδ le trièdre formé par les trois

Fig. 7.



faces qui se coupent en D, et α', β', γ' les points d'intersection de ces faces avec la droite Δ_1; si l'on mène par chacun de ces points les génératrices Δ'_2, Δ'_3, Δ'_4 de l'hy-

perboloïde cherché, ces trois droites et les droites Δ_2, Δ_3, Δ_4 se coupent sur les arêtes du trièdre.

En dernière analyse, le problème est donc ramené au suivant, très simple et dont la solution est bien connue:

Étant donné un trièdre DCEδ, *et deux points dans chacune de ses faces,* α *et* α', β *et* β', γ *et* γ', *faire passer par ces points, pris dans l'ordre suivant :* $\alpha\beta'\gamma\alpha'\beta\gamma'$, *les côtés successifs d'un hexagone ayant ses sommets opposés sur chacune des arêtes du trièdre.*

Ce problème se résout indifféremment dans l'espace ou dans le plan, après projection.

(*A suivre.*)

NOTE SUR LA THÉORIE DES FOYERS;

PAR M. E. HUMBERT,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nancy.

Considérons d'abord la conique

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

donnée par l'équation générale. Si, de l'ensemble des termes du second degré, on retranche $s(x^2+y^2)$, on obtient

$$(a-s)x^2 + 2bxy + (c-s)y^2,$$

qui est un carré parfait pour les deux valeurs de s données par l'équation du second degré

$$(1) \qquad (a-s)(c-s) - b^2 = 0.$$

Pour chacune de ces valeurs de s, on a

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = s(x^2+y^2) + \frac{[(a-s)x - by]^2}{a-s}.$$

et l'équation de la conique s'écrit

$$(2) \quad s(x^2+y^2)+\frac{[(a-s)x+by]^2}{a-s}+2dx+2ey+f=0.$$

Cette équation peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned} s[(x-\alpha)^2+(y-\beta)]^2 \\ = -\frac{[(a-s)x+by]^2}{a-s} \\ -2(d+s\alpha)x-2(e+s\beta)y+s(\alpha^2+\beta^2)-f. \end{aligned}$$

Désignons $(a-s)x+by$ par P. La fonction linéaire

$$(d+s\alpha)x+(e+s\beta)y$$

ne différera de P que par le facteur constant

$$\frac{d+s\alpha}{a-s},$$

si l'on a

$$(3) \quad \frac{d+s\alpha}{a-s}=\frac{e+s\beta}{b};$$

et alors l'équation de la conique pourra s'écrire

$$s[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]=-\frac{P^2}{a-s}-2\frac{d+s\alpha}{a-s}P+s(\alpha^2+\beta^2)-f,$$

et l'on voit que c'est seulement dans ce cas que le second membre pourra être un carré parfait, sous la condition

$$(4) \quad (d+s\alpha)^2+s(a-s)(\alpha^2+\beta^2)-f(a-s)=0.$$

C'est, du reste, la condition nécessaire et suffisante pour que le point α, β soit un foyer. Donc on obtient les foyers par la résolution des équations (1), (3) et (4).

La première donne deux valeurs pour s; ensuite, à chaque valeur de s correspondent deux foyers qui sont situés sur la droite (3) et la conique (4).

L'équation (3) représente les deux axes de la conique,

lorsqu'on y remplace s successivement par les deux racines de l'équation (1). Si l'on veut avoir l'excentricité, rien n'est plus facile. Il suffit de remarquer que le second membre de la conique peut s'écrire, dans le cas où le point α, β est un foyer,

$$-\frac{(P+K)^2}{a-s},$$

K étant une constante; ou bien

$$-\frac{(a-s)^2+b^2}{a-s}\left[\frac{P+K}{\sqrt{(a-s)^2+b^2}}\right]^2,$$

la parenthèse représentant la distance du point x, y à la directrice $P+K=0$. Donc, en désignant par ρ la distance d'un point de la conique au foyer, par d sa distance à la directrice, on a

$$\rho^2 = \frac{(a-s)^2+b^2}{s(s-a)}\,d^2.$$

Donc le carré de l'excentricité e^2 est donné par

$$(5) \qquad e^2 = \frac{\rho^2}{d^2} = \frac{(a-s)^2+b^2}{s(s-a)}.$$

Remplaçons b^2 par $(a-s)(c-s)$, dans cette expression, et nous aurons

$$(6) \qquad e^2 = 2 - \frac{a+c}{s}.$$

On tire de là

$$s = \frac{a+c}{2-e^2},$$

et, en partant de l'équation (1),

$$(7) \quad (b^2-ac)e^4 - [4b^2+(a-c)^2]e^2 + 4b^2 + (a-c)^2 = 0.$$

Telle est l'équation qui donne les deux valeurs de e^2.

l'une relative aux foyers réels, et l'autre relative aux foyers imaginaires.

Cette équation a toujours ses deux racines réelles; dans le cas de l'ellipse, l'une est positive, celle qui répond aux foyers réels, et l'autre est négative, celle qui répond aux foyers imaginaires; dans le cas de l'hyperbole, ces deux valeurs de e^2 sont positives. Si l'on désigne par e^2 la valeur qui répond aux foyers réels et par e'^2 la seconde, on a

$$(8) \qquad \frac{1}{e^2}+\frac{1}{e'^2}=1;$$

d'où

$$e'^2=\frac{e^2}{e^2-1}.$$

De l'équation (8) il résulte que, dans le cas de l'ellipse, e^2 est inférieur à 1, tandis que dans le cas de l'hyperbole e^2 et e'^2 sont tous deux supérieurs à 1.

Cette méthode permet aussi d'obtenir l'équation générale des cercles doublement tangents à la conique. En effet, on peut écrire l'équation de la conique ainsi

$$s[(x-\alpha^2)+(y-\beta^2)+\gamma]$$
$$=-\frac{P^2}{a-s}-2(a+s\alpha)x-2(e+s\beta)y+s(\alpha^2+\beta^2+\gamma)-f;$$

et le second membre est un carré parfait sous les deux conditions

$$(3) \qquad \frac{d+s\alpha}{a-s}=\frac{e+s\beta}{b}$$

et

$$(9) \qquad (d+s\alpha)^2+(a-s)[s(\alpha^2+\beta^2+\gamma)-f]=0.$$

De la deuxième on tire

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma=\frac{f}{s}+\frac{(d+s\alpha)^2}{s(s-a)};$$

et, en portant dans le premier membre de l'équation de la conique, on obtient pour équation du cercle cherché

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\frac{f}{s}+\frac{(d+s\alpha)^2}{s(s-a)}=0,$$

sous les conditions (1) et (3).

L'équation (3) donne

$$\beta=-\frac{e}{s}+\frac{b(d+s\alpha)}{s(a-s)};$$

donc l'équation générale des cercles doublement tangents à la conique est

$$(1)\quad x^2+y^2-2\alpha x-2\left[\frac{b(d+s\alpha)}{s(a-s)}-\frac{e}{s}\right]\beta+\frac{f}{s}+\frac{(d+s\alpha)^2}{s(s-a)}=0.$$

Dans cette équation, s peut prendre les deux valeurs données par l'équation (1), et α est un paramètre arbitraire. Il y a donc deux séries de cercles doublement tangents à une conique, et l'équation (3) montre que les centres des cercles de chacune de ces séries décrivent, pour l'une, l'un des axes, et pour l'autre, l'autre axe.

En outre, si l'on désigne par C le premier membre de l'équation d'un cercle, dans lequel le coefficient de x^2+y^2 est égal à 1, par Q le premier membre de l'équation d'une droite mise sous la forme normale, l'équation générale des coniques doublement tangentes à C, aux deux points où $Q=0$ la coupe, est

$$C-e^2Q^2=0$$

ou

$$C-e'^2Q^2=0,$$

suivant que l'axe qui passe au centre de C est l'axe focal, ou non.

Cette méthode peut, dans certains cas, donner facile-

ment un lieu de foyers. Elle s'applique très aisément au problème suivant :

Trouver le lieu des foyers des coniques qui sont doublement tangents à deux cercles.

Elle peut aussi donner facilement l'équation générale des directrices, car cette équation est

$$P + K = 0 \quad \text{et} \quad K = d + s\alpha.$$

Donc l'équation générale des directrices est

$$(11) \qquad (a - s)x + by + d + s\alpha = 0,$$

dans laquelle α est un paramètre arbitraire et s une racine de l'équation (1). Il y a deux séries de directrices.

Cette Note, où rien de nouveau sans doute ([1]) n'est exposé, a été rédigée surtout pour les élèves de Mathématiques spéciales. On peut, par une méthode analogue, chercher les foyers des surfaces du second degré; mais, ceci étant de peu d'utilité pour les élèves et n'ayant pas grande valeur théorique, il est inutile que j'insiste là-dessus.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Genocchi.

Une lettre de Gauss à Sophie Germain, du 30 avril 1807, publiée par le prince Boncompagni, transcrit une proposition de cette femme illustre sur la forme $y^2 + nz^2$, en ajoutant qu'elle n'est pas vraie dans toute

---

([1]) J'ai donné cette méthode dans mon cours, en 1882, comme application au plan de la *Détermination des sections circulaires* (t. I, 3e série, p. 202). CH. B.

sa généralité, et donne une explication sur les cas dans lesquels elle peut tomber en défaut. Cette explication se fonde sur la théorie de la composition des formes quadratiques binaires, théorie qui, à présent, est trop peu cultivée et trop peu connue. Je crois qu'il serait bon d'appeler l'attention sur une théorie d'un si haut intérêt, et, pour cela, il pourrait être utile de proposer, dans les *Nouvelles Annales*, la question qui a été le sujet des réflexions de Gauss. Je la proposerais dans les termes suivants :

« Sophie Germain a voulu démontrer cette proposition : *Si l'un des facteurs de la formule* $y^2 + nz^2$ (*n étant un nombre premier*) *est de la même forme* $y^2 + nz^2$, *l'autre appartient aussi nécessairement à cette forme.* Mais la démonstration qui s'applique aux formes *indéfinies* ne vaut pas pour les nombres *définis*. A l'égard des nombres définis, la proposition est vraie si le facteur qu'on suppose de la forme $y^2 + nz^2$ est un nombre premier, mais n'est pas généralement vraie si ce facteur est un nombre composé. Ainsi l'on peut trouver trois nombres f, g, h représentés par des formes quadratiques binaires dont le déterminant soit $-n$, et tels que le produit fgh des trois et le produit fg des deux premiers soient de la forme $y^2 + nz^2$, et, au contraire, l'autre facteur h ne soit pas de cette forme. GAUSS. »

Extrait d'une lettre de M. H. Brocard.

M. d'Ocagne a eu raison de dire, au commencement de son Mémoire sur les coordonnées parallèles et axiales (t. III, p. 411), que la courbe (C) qu'il devait étudier au n° 50 (p. 55) donnerait lieu sans doute à de nouvelles remarques. Ce n'est pas la première fois, en effet, que cette courbe a fixé l'attention des géomètres.

Si l'on a égard au mode de génération mécanique signalé (p. 559), la courbe (C) répond à l'énoncé de la question 1029 que j'ai proposée (t. X, 2[e] série, p. 240) :

Les extrémités A *et* B *d'une longueur constante* $a = \mathrm{AB}$ *se meuvent sur les côtés d'un angle droit fixe* AOB; *trouver l'enveloppe de la perpendiculaire* AM *à* AB; *calculer la position des points de rebroussement, et mener les tangentes en ces points.*

Dans une solution très élégante (t. XIII, p. 459-460), M. A. Pellissier a donné l'équation de cette courbe qui, en prenant les notations du n° 50, devient

$$(1)\qquad [4a^2 - 3(x^2+y^2)]^3 = a^2(8a^2 - 9x^2 + 18y^2)^2.$$

Elle admet quatre points de rebroussement, à l'intersection du cercle

$$(2)\qquad x^2 + y^2 = \tfrac{4}{3}a^2$$

avec l'hyperbole concentrique

$$(3)\qquad 18y^2 - 9x^2 + 8a^2 = 0.$$

En ces points, dont les coordonnées sont

$$(4)\qquad x = \pm\frac{4a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}},\quad y = \pm\frac{2a}{3\sqrt{3}},$$

les tangentes à la courbe sont aussi les tangentes à l'hyperbole, et leur coefficient angulaire est égal à $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Le point M de contact de la tangente TM avec la courbe (C) peut s'obtenir par la considération du centre instantané de rotation. Il n'y a qu'à achever le rectangle OUIT et à projeter la somme I de ce rectangle en M sur TM.

Cette tangente TM a pour équation

$$y = px - \frac{ap^2}{\sqrt{1+p^2}},$$

p désignant $\frac{dy}{dx}$. C'est donc aussi l'équation différentielle de la courbe (C). On en conclut que le lieu des points D ou la podaire de l'origine a pour équation

$$\rho = a \cos^2 \omega.$$

Cette podaire se compose de deux ovales.

M. Bourguet a montré (t. XIII, 2ᵉ série, p. 446) que la courbe (C) est une développante de l'hypocycloïde à quatre rebroussements, enveloppe d'une droite de longueur $2a$ dont les extrémités glissent sur Ox et Oy.

Enfin M. Haton de la Goupillière a complété cette remarque par une intéressante bibliographie de cette hypocycloïde, nommée aussi *cubo-cycloïde* par M. Montucci (t. XIII, 2ᵉ série, p. 534-537, et t. XIX, p. 94-96). Les propriétés signalées par M. d'Ocagne (p. 560) pour la quadrature et la rectification de la courbe (C) se rattachent naturellement à ce qui précède.

Ainsi les formules (4) vérifient l'équation de l'hypocycloïde

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

D'ailleurs, l'article de M. d'Ocagne renferme les principes de toutes ces remarques.

Désignons, en effet, par N, N' les points où la normale IM rencontre Ox et Oy, et achevons le rectangle ONN'P. Soient G, G' les projections des points O et P sur IM, T étant le milieu de ON, et I le milieu de NN'; on a $IN = IN' = TU = a$ et $NN' = 2a$ (p. 558).

Ainsi les axes Ox, Oy déterminent sur la normale en M à la courbe (C) un segment de longueur constante $2a$.

L'enveloppe des normales ou *la développée de* (C) *est donc l'hypocycloïde à quatre rebroussements, lieu des projections* G' *du point* P *sur les droites constantes* NN'.

En d'autres termes, la courbe (C) est la développante de cette hypocycloïde qui passe par l'origine.

Les géomètres que l'étude de cette hypocycloïde intéresserait pourront consulter aussi les documents suivants : *Nouvelles Annales*, questions 616 (Bökleu); 1391 (Laguerre); t. I, p. 176-178, 1862 (Delorme), et p. 315-316 (Beltrami); t. XVII, p. 321-323, 1878 (A. M.); *Atti del Acc. Pont. dei Nuovi Lincei*, t. XXI, p. 6-39, 1877-1878 (Azzarelli); et *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. IV, p. 90-91 et 140-141, 1878 (Sidler).

BIBLIOGRAPHIE.

THÉORIE DU POTENTIEL; par M. *Émile Mathieu*. In-4°; 1885. Prix : 9fr. Paris, Gauthier-Villars.

L'Ouvrage que je viens de faire paraître forme le troisième Volume du *Traité de Physique mathématique* que je me suis proposé de publier. Les deux premiers Volumes sont :

I. *Cours de Physique mathématique*, 1873, qui renferme la matière des leçons que j'ai faites dans un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences de Paris en 1867-1868.

II. *Théorie de la Capillarité*, 1883.

Le troisième Volume est d'ailleurs indépendant des deux précédents.

Tous les théorèmes exposés dans mon nouvel Ouvrage ont pris leur origine dans la Physique mathématique; mais beaucoup ont été employés ensuite dans différentes recherches de Mathématiques pures et en particulier dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire.

Il n'est pas sans intérêt de dire quelques mots sur les premiers fondateurs de cette théorie.

Laplace est le premier qui ait considéré le potentiel; c'est la fonction V de sa *Mécanique céleste* (Ire Partie, Liv. III). Poisson ensuite, dans son célèbre Mémoire de 1811 *sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs* et dans d'autres Mémoires publiés après, a montré le grand rôle de cette fonction dans la Physique mathématique.

Plus tard, Green a publié sur ce sujet (à Nottingham, 1828) un Mémoire très remarquable. Il semble qu'on n'y ait fait aucune attention pendant sa vie, dont la fin arriva en 1841. Mais autant on fut d'abord injuste envers lui, autant on exagéra ensuite l'importance de son travail, en lui attribuant ce qui était dû à Poisson ou à d'autres géomètres, en lui attribuant même des résultats qui n'avaient été obtenus que plus tard par Gauss. Le travail de Green est d'ailleurs entièrement inspiré par l'œuvre de Poisson.

Gauss a publié son beau Mémoire sur la théorie du potentiel en 1840 (*Œuvres de Gauss*, t. V).

Depuis cette époque, plusieurs autres géomètres ont travaillé à cette théorie.

Dans le Livre que je publie, je me suis proposé d'exposer toutes les propriétés connues du potentiel. Il s'y trouve aussi des résultats qui m'appartiennent et que j'avais déjà présentés, pour la plupart, dans des Mémoires parus dans le *Journal de Mathématiques*.

Dans le premier Chapitre, intitulé *Propriétés générales du potentiel*, je n'expose que des théorèmes connus, en général, depuis assez longtemps.

Le Chapitre II a pour titre : *Potentiel de couches de matière distribuées sur des surfaces*. Les propriétés du potentiel de ces couches sont très utiles à étudier pour l'Électrostatique, puisque l'électricité se porte, comme on sait, à la surface des corps conducteurs. J'examine, à l'occasion de la formule de la densité d'une couche, l'influence des courbures principales de la surface sur laquelle est placée la couche, si l'on ne néglige pas des termes qui sont de l'ordre de la densité de la couche multipliée par la racine carrée de son épaisseur. Notons aussi l'examen de conditions, d'après lesquelles une fonction de x, y, z peut être représentée par le potentiel de couches de matière distribuées sur des surfaces.

Dans le Chapitre III, j'étudie des fonctions qui jouissent de propriétés analogues à celles du potentiel et qu'on rencontre aussi en Physique mathématique.

1° Le *potentiel logarithmique* satisfait à la même équation aux dérivées partielles que le potentiel ordinaire, avec cette simplification, que la fonction ne dépend que des coordonnées x, y d'un point et non de la troisième z. Néanmoins la forme de la fonction se trouve changée.

2° Le *potentiel calorifique* se rencontre dans les questions de mouvement de température des corps. Au point de vue analytique, il est une généralisation du potentiel ordinaire.

3° Le *second potentiel* est ainsi appelé par rapport au potentiel ordinaire, que je désigne alors sous le nom de *premier potentiel*. Pour déduire son expression de celle du premier potentiel, il suffit de changer, dans cette dernière, l'inverse de la distance du point variable à chaque point de la masse en cette distance même. Ce potentiel est utile à considérer dans la théorie de l'élasticité des corps solides.

Le Chapitre IV a pour titre : *Comparaison de la théorie du potentiel avec celle de la chaleur*. J'entre dans différentes considérations sur les surfaces isothermes ou de niveau. J'étudie la nature des lignes nodales d'une membrane homogène et partout également tendue et aussi les propriétés du potentiel relatif aux corps cristallisés. Je signalerai encore une digression sur la différentiation par rapport à des arcs. Fort souvent, on a un très grand avantage à substituer à la méthode des coordonnées curvilignes de Lamé la méthode de la différentiation par rapport à des arcs, au moins pour faire les calculs qui doivent conduire aux formules cherchées. Ces dérivations exigent l'explication de quelques principes; car on ne peut plus intervertir sur une même fonction l'ordre de deux différentiations, sans changer la valeur du résultat. Je prouve l'utilité de cette méthode de calcul par des exemples.

Le Chapitre V a enfin pour objet : *L'attraction de différents corps dérivés des surfaces du second ordre*. J'y calcule le potentiel d'un ellipsoïde : 1° lorsqu'il est homogène; 2° lorsqu'il est composé de couches homogènes homothétiques; 3° lorsqu'il est formé de couches homogènes et homofocales. J'y détermine aussi le potentiel d'une ellipse recouverte d'une couche mince de matière et celui d'un cylindre elliptique de

longueur finie. Enfin j'examine quelques questions relatives aux lignes de force.

É. MATHIEU.

QUESTIONS.

1525. On donne les deux demi-diamètres conjugués OA, OB d'une ellipse. Du point B on abaisse une perpendiculaire sur OA, et l'on porte sur cette droite les segments BC et BD égaux à OA. La circonférence COD rencontre aux points P, Q la parallèle menée du point B à OA.

On sait que OP, OQ donnent les directions des axes de l'ellipse; on demande de démontrer que les projections de OP et de OQ sur OC (ou sur OD) sont égales aux demi-axes de l'ellipse. (MANNHEIM.)

1526. Considérons un parallélogramme ABCD dans un plan, et une droite quelconque MM′ de ce plan. Il existe deux coniques circonscrites au parallélogramme et tangentes à la droite MM′. Soit O le milieu du segment déterminé sur cette droite par les deux points de contact. Il existe en outre une conique inscrite dans le parallélogramme et tangente à la droite MM′. Soit O′ son point de contact avec cette droite. Les points O et O′ coïncident.

(H. ANDOYER.)

1527. Soient A, B, C, ... des nombres dont le premier chiffre à gauche n'est jamais zéro; a, b, c, ... ces nombres lus de droite à gauche.

J'appelle *nombre symétrique* un nombre tel que deux

chiffres à égale distance des extrêmes soient égaux. Exemples : 1221, 12421.

J'appelle *pseudo-symétrique d'échelle p* un nombre tel que la somme de deux chiffres, à égale distance des extrêmes, soit p ou zéro ; s'il y a un nombre impair de chiffres dans ce nombre et que p soit impair, le chiffre du milieu doit toujours être zéro ; si p est pair, le chiffre du milieu peut être soit zéro, soit $\frac{p}{2}$. Exemples : 6035o2, 6030502, 6034502 sont pseudo-symétriques d'échelle 8.

Cela posé :

1° Si A a n chiffres, trouver combien de valeurs différentes peut prendre la somme $A + a$ quand A varie de x^{n-1} à x^n, x étant la base du système de numération ;

2° Si l'on a $A + a = B + b$, A ayant n chiffres, B en ayant $n + 1$ et étant tel que la somme de deux chiffres à égale distance des extrêmes soit plus petite que x, le nombre $A + a = A + b$ sera symétrique, et A sera pseudo-symétrique d'échelle $x + 1$.

Exemple : on a $(x = 10)$

$$
\begin{aligned}
&\text{N} && \qquad A + a\\
&12111011121 &&= 8607004053 + 3504007068,\\
& && \qquad B + b\\
& &&= 10011000120 + 02100011001.
\end{aligned}
$$

(E. Lemoine.)

1528. Soient PA, PB, PC les trois normales menées d'un point P à une parabole donnée ; on considère les centres O, O', O'', O''' des quatre cercles tangents aux côtés du triangle ABC.

1° Si le point P est sur la directrice, il coïncide avec l'un des points O, O', O'', O'''. Les trois autres sont sur la parabole, lieu des sommets des angles droits normaux à la parabole donnée.

2° Par les points O, O′, O″, O‴ on peut faire passer trois hyperboles équilatères, telles que les normales à chacune d'elles en ces quatre points soient concourantes. Les trois points de concours Q_1, Q_2, Q_3 sont sur un cercle concentrique au cercle circonscrit au triangle ABC et de rayon triple, et sur les rayons de ce cercle qui passent par les centres des hyperboles correspondantes. Pour quelles positions du point P les trois hyperboles sont-elles réelles ? L'une de ces hyperboles a son centre sur l'axe de la parabole. Si le point Q correspondant est sur cette parabole, l'hyperbole correspondante passe par le point P.

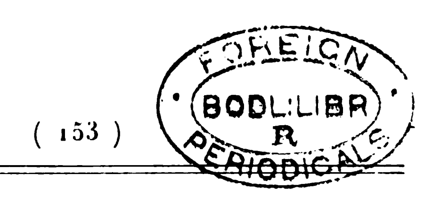
3° En général, quel est le lieu du point P tel que l'une des hyperboles précédentes passe par ce point ? Quel est le lieu du point de concours Q, du centre de l'hyperbole, des points O, O′, O″, O‴ ?

4° Quel est le lieu des points Q_1, Q_2, Q_3, si le point P décrit une droite donnée ?

(J. Hadamard.)

1529. Trois droites, issues des trois sommets d'un triangle, déterminent, sur les côtés opposés, six segments tels que la différence entre le produit de trois segments non consécutifs et le produit des trois autres est $\frac{abc}{a'b'c}\left(\frac{A'}{A}\right)^2 lmn$. Dans cette expression, A, a, b, c désignent l'aire et les côtés du triangle donné; A′, a', b', c' l'aire et les côtés du triangle formé par les trois droites; l, m, n les segments de ces droites compris entre les sommets et les côtés du premier triangle.

(E. Cesaro.)



SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES DONT L'ÉQUATION EST DONNÉE EN COORDONNÉES POLAIRES

[SUITE (1)];

PAR M. CH. BIEHLER.

6. Nous supposerons d'abord que l'équation de la courbe soit donnée sous la forme

$$\rho = F(\omega) \quad \text{ou} \quad u = f(\omega),$$

en posant $\frac{1}{\rho} = u$,

$$F(\omega) = \frac{1}{f(\omega)}.$$

Soient $\omega = \alpha$, $u = a$ les coordonnées d'un point; nous allons chercher la forme de la courbe autour de ce point.

L'équation de la tangente au point $\omega = \alpha$, $u = a$ de la courbe $u = f(\omega)$ s'obtient, comme l'on sait, en égalant à zéro le déterminant

$$\begin{vmatrix} u & \cos\omega & \sin\omega \\ f(\alpha) & \cos\alpha & \sin\alpha \\ f'(\alpha) & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix},$$

ou bien, en développant,

$$u = f(\alpha)\cos(\omega - \alpha) + f'(\alpha)\sin(\omega - \alpha).$$

Le rayon vecteur de la courbe est donné par

$$u = f(\omega).$$

La différence entre les valeurs de u qui se rapportent à

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. III; 1884.

la courbe et à la droite est donc donnée par l'expression

$$\Phi(\omega) = f(\omega) - f(\alpha)\cos(\omega - \alpha) - f'(\alpha)\sin(\omega - \alpha).$$

C'est le signe de la fonction $\Phi(\omega)$ pour des valeurs de ω voisines de α qui donne la forme de la courbe dans le voisinage du point de contact. Or $\Phi(\omega)$ s'annule pour $\omega = \alpha$; sa dérivée

$$\Phi'(\omega) = f'(\omega) + f(\alpha)\sin(\omega - \alpha) - f'(\alpha)\cos(\omega - \alpha)$$

s'annule également pour $\omega = \alpha$; mais la dérivée seconde

$$\Phi''(\omega) = f''(\omega) + f(\alpha)\cos(\omega - \alpha) + f'(\alpha)\sin(\omega - \alpha)$$

devient égale à $f''(\alpha) + f(\alpha)$ pour $\omega = \alpha$.

Supposons que $\Phi''(\alpha) = f''(\alpha) + f(\alpha)$ soit une quantité différente de zéro, et, pour fixer les idées, supposons-la positive : on pourra trouver une quantité angulaire ε, telle qu'entre $\alpha - \varepsilon$ et $\alpha + \varepsilon$ la fonction $\Phi''(\omega)$ ait le signe de $\Phi''(\alpha)$ et, par suite, soit positive; la dérivée $\Phi'(\omega)$ est donc croissante dans tout l'intervalle de $\alpha - \varepsilon$ à $\alpha + \varepsilon$, et, comme elle s'annule pour $\omega = \alpha$, elle est négative quand ω varie de $\alpha - \varepsilon$ à α et positive de α à $\alpha + \varepsilon$; la fonction $\Phi(\omega)$ est donc décroissante entre $\alpha - \varepsilon$ et α et croissante entre α et $\alpha + \varepsilon$, et, comme elle s'annule pour $\omega = \alpha$, elle est positive de $\alpha - \varepsilon$ à α et de α à $\alpha + \varepsilon$. La courbe se trouve donc tout entière d'un même côté de sa tangente dans le voisinage du point de contact; et, dans l'hypothèse faite, le rayon vecteur de la tangente l'emporte sur celui de la courbe; par suite, la courbe est concave vers le pôle.

On arriverait à la conclusion inverse si l'on supposait

$$f''(\alpha) + f(\alpha) < 0,$$

c'est-à-dire que, dans ce cas, la courbe serait convexe vers le pôle.

7. Supposons maintenant

$$f''(\alpha)+f(\alpha)=0,$$

et calculons la valeur de $\Phi'''(\alpha)$.

Or

$$\Phi'''(\omega)=f'''(\omega)-f(\alpha)\sin(\omega-\alpha)+f'(\alpha)\cos(\omega-\alpha),$$

par suite,

$$\Phi'''(\alpha)=f'''(\alpha)+f'(\alpha).$$

Supposons cette quantité différente de zéro, positive par exemple. Dans ce cas, on pourra trouver une quantité angulaire ε, telle qu'entre $\alpha-\varepsilon$ et $\alpha+\varepsilon$ la fonction $\Phi'''(\omega)$ conserve le même signe et, par suite, soit positive. $\Phi''(\omega)$ est, dans ce cas, croissante entre $\alpha-\varepsilon$ et $\alpha+\varepsilon$, et, comme elle s'annule pour $\omega=\alpha$, elle est négative entre $\alpha-\varepsilon$ et α et positive entre α et $\alpha+\varepsilon$; la fonction $\Phi'(\omega)$ est donc décroissante entre $\alpha-\varepsilon$ et α et croissante entre α et $\alpha+\varepsilon$, et, comme elle s'annule pour $\omega=\alpha$, elle est positive dans tout l'intervalle de $\alpha-\varepsilon$ à $\alpha+\varepsilon$; par suite, $\Phi(\omega)$ est croissante dans tout cet intervalle, et, comme elle s'annule pour $\omega=\alpha$, elle est négative entre $\alpha-\varepsilon$ et α et positive entre α et $\alpha+\varepsilon$. La courbe est donc convexe vers le pôle entre $\alpha-\varepsilon$ et α et concave entre α et $\alpha+\varepsilon$. Le point $\omega=\alpha$, $u=a$ est un point d'inflexion.

La discussion précédente fait donc voir que les points d'inflexion d'une courbe sont donnés par l'équation

$$f(\omega)+f''(\omega)=0$$

ou

$$\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''=0.$$

Elle montre, de plus, que, si la première des dérivées de la fonction $\Phi(\omega)$ qui ne s'annule pas est d'ordre pair 2μ, la courbe est convexe vers le pôle autour du point

$\omega = \alpha$, $u = a$, si $\Phi^{(2\mu)}(\alpha) < 0$, et concave si $\Phi^{(2\mu)}(\alpha) > 0$. Si la première des dérivées de la fonction $\Phi(\omega)$ qui ne s'annule pas pour $\omega = \alpha$ est d'ordre impair $2\mu + 1$, le point considéré est un point d'inflexion, et il sera toujours possible de préciser la forme de la courbe autour de ce point d'après le signe de $\Phi^{(2\mu+1)}(\alpha)$.

Nous avons supposé que l'équation de la courbe est donnée sous la forme

$$u = f(\omega).$$

Si l'équation de la courbe était $F(u, \omega) = 0$ non résolue par rapport à u, il est possible de déterminer, d'après ce qui précède, la forme de la courbe en un point $u = a$, $\omega = \alpha$; car les quantités $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, ..., $f^{2\mu}(\alpha)$, $f^{2\mu+1}(\alpha)$ qui interviennent dans la discussion précédente peuvent être tirées de l'équation de la courbe; ce sont les quantités u', u'', ... qui sont fournies par les égalités

$$F'_\omega + u' F'_u = 0,$$
$$F''_{\omega^2} + 2u' F''_{\omega u} + u'^2 F''_{u^2} + u'' F'_u = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Toutefois ce procédé n'est plus applicable quand $F'_u = 0$.

Supposons l'équation $F(u, \omega) = 0$ algébrique et de degré m en u, et proposons-nous de construire, dans le cas précédent, cette courbe autour du point $u = a$, $\omega = \alpha$.

Posons, pour cela,

$$u = a + V, \quad \omega = \alpha + \varepsilon,$$

l'équation de la courbe deviendra

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} 0 = {} & \varepsilon F'_\omega(a, \alpha) + V F'_u(a, \alpha) \\ & + \frac{\varepsilon^2}{1.2} F''_{\omega^2}(a, \alpha) + \varepsilon V F''_{\omega u}(a, \alpha) + \frac{V^2}{1.2} F''_{u^2}(a, \alpha) + \dots \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(2)\qquad o = \Phi(\alpha, \varepsilon) + V\,\Phi_1(\alpha, \varepsilon) + \ldots + V_m\,\Phi_m(\alpha, \varepsilon).$$

Si $F'_u(a, \alpha) = o$ et $F'_\omega(a, \alpha) \gtrless o$, les deux fonctions $\Phi(a, \varepsilon)$, $\Phi_1(a, \varepsilon)$ sont divisibles par ε, et, par suite, quand ε tend vers zéro, deux des racines de l'équation (2) tendront vers zéro.

En désignant par V_1 et V_2 ces deux racines, par $V_3, \ldots, V_m$ les autres, on a

$$\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \cdots + \frac{1}{V_m} = -\frac{\Phi_1(\alpha, \varepsilon)}{\Phi(\alpha, \varepsilon)},$$

$$\frac{1}{V_1 V_2} + \cdots + \frac{1}{V_{m-1} V_m} = \frac{\Phi_2(\alpha, \varepsilon)}{\Phi(\alpha, \varepsilon)},$$

ou bien

$$\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} = -\left[\frac{F''_{\omega u}(a, \alpha)}{F'_\omega(a, \alpha)} + \varphi(\alpha, \varepsilon) + S_1\right],$$

$$\frac{1}{V_1 V_2} = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{F''_{u^2}(a, \alpha)}{F'_\omega(a, \alpha)} + \psi(\alpha, \varepsilon) + S_2\right],$$

S_1 est la somme des quantités $\frac{1}{V_3} + \cdots + \frac{1}{V_m}$, et S_2 la somme des produits deux à deux des mêmes quantités, $\varphi(\alpha, \varepsilon)$ et $\psi(\alpha, \varepsilon)$ sont des fonctions qui renferment ε en facteur.

De ces formules on tire la suivante :

$$\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon}\left[-\frac{4F''_{u^2}(a, \alpha)}{F'_\omega(a, \alpha)} + \theta(\alpha, \varepsilon)\right],$$

$\Theta(\alpha, \varepsilon)$ renfermant ε en facteur.

Les racines V_1 et V_2 ne sont donc réelles qu'autant que ε est de signe contraire à

$$\frac{F''_{u^2}(a, \alpha)}{F'_\omega(a, \alpha)};$$

par suite, si $F''_{u^2}(a, \alpha)$ est différent de zéro, la courbe se trouve tout entière d'un même côté du rayon OA mené

sous l'angle α, et le signe de la fonction

$$\frac{F''_{u^2}(a, \alpha)}{F'_{\omega}(a, \alpha)}$$

indique de quel côté se trouve la courbe. La formule qui nous donne la somme $\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}$ nous montre que cette somme est finie; par suite, comme V_1 et V_2 tendent vers zéro, ils sont de signes contraires.

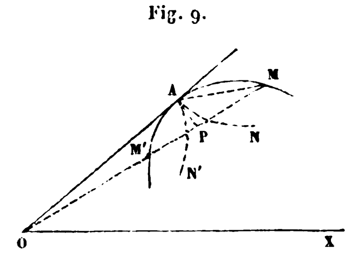
Si

$$\frac{F''_{u^2}(a, \alpha)}{F'_{\omega}(a, \alpha)} > 0,$$

la courbe a la forme représentée (*fig.* 9).

On obtient une branche MAM' tangente à OA et non

Fig. 9.



une branche analogue à NAN', car, dans le triangle PAM obtenu en prenant $OP = OA$, le rapport $\frac{AP}{PM}$ a pour limite zéro quand ε tend lui-même vers zéro.

Si $F'_{\omega}(a, \alpha)$ est nul en même temps que $F'_{u}(a, \alpha)$, le point $u = a$, $\omega = \alpha$ est un point double.

Dans ce cas, l'équation

$$F'_{\omega} + u' F'_{u} = 0$$

devient une identité pour $u = a$, $\omega = \alpha$; mais la suivante, à savoir

$$F''_{\omega^2} + 2u' F''_{\omega u} + u'^2 F''_{u^2} = 0,$$

donne, dans ce cas, les valeurs de u' au nombre de 2.

L'équation suivante

$$F'''_{\omega^3} + 3u'F'''_{\omega^2 u} + 3u'^2 F'''_{\omega u^2} + u'^3 F'''_{u^3} + 3u''(F''_{u\omega} + u'F''_{u^2}) = 0$$

donne la valeur de u'' correspondant à chaque valeur de u'.

La méthode indiquée pour traiter le cas où

$$F'_u(a, 2) = 0$$

peut s'appliquer à la discussion générale. Mais nous ne l'exposerons pas ici, et nous allons passer à la construction de la courbe autour de ses points à l'infini.

(*A suivre.*)

ÉTUDE SUR UN THÉORÈME D'ABEL RELATIF AUX SÉRIES ET SUR UN DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE SOUVENT UTILE EN ASTRONOMIE;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Considérons une série, ordonnée suivant les puissances positives et entières d'une variable z, et convergente tant que le module de z reste inférieur à un nombre R. Abel a montré que si, pour une valeur $Z = Re^{\omega i}$ de z, la série est encore convergente, sa somme A est la limite vers laquelle tend la somme de la série quand on donne à z une suite de valeurs dont les arguments sont tous égaux à ω, tandis que leurs modules, inférieurs à R, tendent vers cette limite. Dans le tome V de son Journal, Liouville expose une démonstration du théorème d'Abel, due à Dirichlet, mais qui présente, au moins dans la forme, une imper-

fection analogue à celle qu'on reprochait aux anciennes démonstrations relatives à la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$: on y considère un nombre qu'on prend d'abord fini, puis on le fait croître indéfiniment, ce qui ôte toute netteté au raisonnement; une simple modification de l'analyse de Dirichlet nous fournira une démonstration élémentaire et tout à fait rigoureuse du théorème d'Abel.

D'un autre côté, quelques géomètres, parmi lesquels on pourrait citer un de nos maîtres les plus savants, se sont demandé si l'on ne peut pas regarder comme évident, ou du moins démontrer en quelques mots, le théorème d'Abel ou même un théorème plus général comprenant celui d'Abel, et qu'on pourrait énoncer ainsi :

Quand une série, dont tous les termes sont des fonctions continues d'une variable réelle x, est convergente tant que x ne dépasse pas un nombre X, sa somme varie d'une manière continue avec x, même quand x atteint la limite X.

Un exemple nous prouvera que cette proposition n'est pas vraie; donc la démonstration intuitive à laquelle j'ai fait allusion est insuffisante et l'on ne pouvait apporter trop de soin à bien établir le théorème d'Abel; mais, de plus, j'explique la discontinuité de la série que je considère, et ce n'est pas sans jeter quelque jour sur une des propriétés les plus singulières des séries.

L'application du théorème d'Abel à des séries convenablement choisies donne des identités plus ou moins remarquables; je prendrai comme exemple le développement en série, entière par rapport à z, de la valeur de θ qui est définie par l'équation

$$\cos\theta = \cos\varphi + z.$$

et qui se réduit à φ pour $z = 0$. Cet exemple est choisi, moins en vue de l'égalité fournie par le théorème d'Abel, que parce qu'il me donnera l'occasion de calculer explicitement les coefficients de la série par une méthode avantageuse; la formule que nous obtiendrons, moins simple et moins étudiée qu'une formule analogue de Delambre, est au moins aussi utile en Analyse et en Astronomie.

Commençons par démontrer le théorème d'Abel. Soit

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_p z^p + \ldots$$

la série considérée : nous supposons que, pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur à R, elle a une somme S, et pour $z = Z$ une somme A. Si l'on pose $u_p Z^p = v_p$, on a

$$(1) \qquad A = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_p + \ldots.$$

Pour les valeurs de z dont le module est $< R$, mais dont l'argument est le même que celui de Z, on aura $z = \lambda Z$, λ étant un nombre réel compris entre 0 et 1, et la somme de la série pourra s'écrire

$$S = v_0 + v_1 \lambda + v_2 \lambda^2 + \ldots + v_p \lambda^p + \ldots.$$

Pour établir le théorème d'Abel, il suffit évidemment de prouver que, si l'on prend $1 - \lambda$ suffisamment petit, le module de $A - S$ sera inférieur à un nombre donné quelconque ε. Nous y parviendrons en transformant convenablement l'expression de S.

Je désigne par A_p la somme des $p+1$ premiers termes de la série (1), et par α_p le reste correspondant, de sorte qu'on a $A = A_p + \alpha_p$, et

$$v_p = A_p - A_{p-1}, \quad v_0 = A_0.$$

Dans S, remplaçons $v_0, v_1, \ldots, v_m$ par les valeurs indi-

quées ci-dessus, et appelons ρ_m la somme de tous les termes qui suivent le $m+1^{\text{ième}}$ terme de la série, m étant un entier que je laisse provisoirement arbitraire; on aura

$$\begin{aligned} S &= A_0 + (A_1 - A_0)\lambda + (A_2 - A_1)\lambda^2 + \ldots + (A_m - A_{m+1})\lambda^m + \rho_m \\ &= (1-\lambda)(A_0 + A_1\lambda + \ldots + A_{m-1}\lambda^{m-1}) + A_m\lambda^m + \rho_m. \end{aligned}$$

J'introduis encore un autre entier n, que j'assujettis d'abord à la seule condition de ne pas dépasser m; puis, dans la parenthèse qui multiplie $(1-\lambda)$, je remplace les coefficients A_p, à partir de A_n inclusivement, par leur valeur $A - \alpha_p$: il vient

$$\begin{aligned} S = &(1-\lambda)(A_0 + A_1\lambda + \ldots + A_{n-1}\lambda^{n-1}) \\ &+ (1-\lambda)A(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \ldots + \lambda^{m-1}) \\ &- (1-\lambda)(\alpha_n\lambda^n + \ldots + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1}) + A_m\lambda^m + \rho_m; \end{aligned}$$

le deuxième terme du second membre se réduit à

$$A\lambda^n - A\lambda^m = A\lambda^n - (A_m + \alpha_m)\lambda^m;$$

les termes $A_m\lambda^m$ et $-A_m\lambda^m$ se détruisent, et si de A on retranche la valeur obtenue pour S, il vient

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} A - S = &A(1-\lambda^n) - (1-\lambda)(A_0 + A_1\lambda + \ldots + A_{n-1}\lambda^{n-1}) \\ &- (1-\lambda)(\alpha_n\lambda^n + \ldots + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1}) + \alpha_m\lambda^m - \rho_m. \end{aligned} \right.$$

Le module de $A - S$ est inférieur à la somme des modules des cinq termes qui forment le second membre de l'équation précédente; cherchons des limites supérieures de ces modules. Soit B le plus grand des modules de $A, A_0, A_1, A_2, \ldots$; comme on a

$$1 - \lambda^n = (1-\lambda)(1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^{n-1}) < n(1-\lambda),$$

le module du premier terme du second membre de (2) est $< nB(1-\lambda)$; le module du terme suivant est évidemment inférieur à la même limite; ensuite, si β est le plus grand parmi les modules de $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots$, le module du troisième terme que nous avons à considérer

sera inférieur à

$$(1-\lambda)\beta(\lambda^n+\lambda^{n+1}+\ldots+\lambda^{m-1})=\beta\lambda^n-\beta\lambda^m<\beta-\beta\lambda^m;$$

le module du quatrième terme est $<\beta\lambda^m$, et en ajoutant au module du cinquième terme les limites supérieures que nous venons d'obtenir pour les modules des quatre premiers termes, on trouve

$$(3)\qquad \operatorname{mod}(A-S)<2nB(1-\lambda)+\beta+\operatorname{mod}\rho_m.$$

Cela posé, déterminons n de telle sorte que les modules de α_n, α_{n+1}, ..., et par suite β, soient inférieurs à $\frac{1}{4}\varepsilon$, ce qui est possible puisque la série (1) est convergente; on peut aussi déterminer m de telle sorte que $\operatorname{mod}\rho_m<\frac{1}{4}\varepsilon$, quel que soit λ entre 0 et 1; m sera peut-être beaucoup plus grand que n, mais il sera fini, comme ε; enfin prenons λ assez voisin de l'unité pour que $nB(1-\lambda)$ soit $<\frac{1}{4}\varepsilon$. L'inégalité (3) montre que, pour toutes les valeurs de λ qui satisfont à cette condition, le module de $A-S$ sera moindre que ε, ce qui, comme je l'ai dit, démontre en toute rigueur le théorème d'Abel sans que nous ayons eu une seule fois à parler de l'infini.

Pour être nette et élémentaire, la démonstration précédente ne laisse pas que d'offrir une certaine complication, et l'on peut se demander s'il n'est pas possible d'établir en quelques mots soit le théorème d'Abel, soit le théorème plus général dont j'ai parlé. Considérons une série dont tous les termes sont des fonctions continues d'une variable réelle x, et qui est convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre X_0 et X inclusivement; on peut croire que, pour toutes ces valeurs, la somme de la série sera une fonction continue de x. En effet, dira-t-on, pour toutes ces valeurs, la

série a une somme déterminée qui dépend en général de x. Soient $F(x)$ cette somme, $\varphi(x)$ la somme des n premiers termes de la série, $\psi(x)$ le reste correspondant; on aura

$$F(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

On peut prendre n assez grand, quoique fini, pour que $\psi(x)$ soit inférieur à un nombre donné ε, si petit qu'il soit; alors $\varphi(x)$, étant la somme d'un nombre limité de fonctions continues de x, sera lui-même une fonction continue de x, et il en sera de même pour $F(x)$, puisque $\psi(x)$ est, si l'on veut, négligeable.

Pour prouver l'insuffisance de cette démonstration, il suffit de citer un cas où le théorème censé démontré tombe en défaut. Prenons la série qui a pour terme général

$$u_p = \frac{x^{4p-3}}{4p-3} + \frac{x^{4p-1}}{4p-1} - \frac{x^{2p}}{2p}:$$

elle est obtenue en transposant et en groupant les termes du développement bien connu de $L(1+x)$ suivant les puissances de x par la formule de Maclaurin, et représente la même fonction tant que $\bmod x < 1$; pour $x = 1$, elle devient

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots.$$

On sait que cette série est convergente et a pour somme $\frac{3}{2}L2$; ce n'est pas la valeur de $L(1+x)$ pour $x = 1$, et la série considérée, quoique satisfaisant aux conditions du théorème que je discute, est discontinue pour $x = 1$. Le théorème proposé est donc faux, et le théorème d'Abel, qui en est un cas particulier, ne saurait être presque évident; il faut, au contraire, pour l'établir, examiner les choses de très près.

Ce n'est pas tout de savoir que la démonstration criti-

quée est illusoire ; il faut en trouver le défaut. Considérons deux valeurs de x, a et $a - h$, h étant une très petite quantité ; pour que $\psi(a)$ et $\psi(a-h)$ soient inférieurs à un autre nombre très petit ε, il faut prendre pour n une valeur très grande qui dépend de ε, a et h. Quand x varie de $a - h$ à a, chacun des termes de $\varphi(x)$ varie d'une quantité très petite, en général, de l'ordre de h ; mais, comme ces termes sont très nombreux, il peut arriver que leur somme $\varphi(x)$ varie d'une quantité finie ou même très grande ; $F(a-h)$ ne sera pas très voisine de $F(a)$, et la série sera discontinue dans le voisinage de $x = a$.

Dans l'exemple cité, donnons à x les valeurs 1 et $1 - h$; pour de très petites valeurs de h, $(1-h)^p$ est sensiblement égal à e^{-ph}, et la valeur de u_p, en y faisant $x = 1 - h$, diffère peu de $\frac{1}{2p}(e^{-4ph} - e^{-2ph})$; si ph a une valeur finie, u_p est de l'ordre de $\frac{1}{p}$. Pour que $\psi(1-h)$ soit très petit, il ne faut pas qu'il contienne beaucoup de termes de cette espèce, ce qui exige évidemment que nh soit très grand ; on s'assure aisément que dans ce cas $\psi(1)$ est aussi très petit. Cela posé, on peut écrire

$$\begin{aligned}\varphi(1) - \varphi(1-h) = &\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2n}\right)\\ &- \left[\frac{1}{1-h} - \frac{(1-h)^2}{2} + \ldots - \frac{(1-h)^{2n}}{2n}\right]\\ &+ \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \ldots + \frac{1}{4n-1}\right]\\ &- \left[\frac{(1-h)^{2n+1}}{2n+1} + \ldots + \frac{(1-h)^{4n-1}}{4n-1}\right];\end{aligned}$$

la différence des deux premières parties, qui sont des valeurs très approchées de L2 et $L(2-h)$, est très petite ; la quatrième partie, inférieure à n fois son pre-

mier terme, ou sensiblement à $\frac{n}{2n+1}e^{-2nh}$, est très petite, puisque nh est très grand ; reste la troisième partie qui, pour de grandes valeurs de n, diffère peu de $\frac{1}{2}L2$: telle est, à la limite, la différence entre $\varphi(1)$ et $\varphi(1-h)$, ou entre $F(1)$ et $F(1-h)$, et qui s'accorde avec un fait bien connu.

Je vais appliquer le théorème d'Abel à la série, ordonnée suivant les puissances positives et entières de z, dans laquelle on peut développer la valeur de θ qui satisfait à l'équation $\cos\theta = \cos\varphi + z$, et qui se réduit à φ pour $z = 0$. Le théorème de Cauchy montre que ce développement est possible quand $\operatorname{mod} z < 1 - \operatorname{mod}\cos\varphi$; dans ces conditions, je développe θ par la formule de Maclaurin, et comme $\theta = \operatorname{arc}\cos(\cos\varphi + z)$, en posant $\cos\varphi = x$, tout revient à calculer les dérivées successives de la fonction $\operatorname{arc}\cos x$, que je désigne par t. On a d'abord

$$\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d^2t}{dx^2} = \frac{-x}{(1-x^2)^{\frac{2}{3}}};$$

le moyen qui me semble le plus commode pour avoir la valeur explicite de toutes les dérivées consiste à déduire des deux équations précédentes l'égalité

$$(1-x^2)\frac{d^2t}{dx^2} - x\frac{dt}{dx} = 0.$$

Différentiant n fois par rapport à x, on trouve

$$(4) \qquad (1-x^2)\frac{d^{n+2}t}{dx^{n+2}} - (2n+1)x\frac{d^{n+1}t}{dx^{n+1}} - n^2\frac{d^nt}{dx^n}.$$

Si, dans cette relation, on fait successivement n égal à 1, 2, 3, ..., on pourra calculer de proche en proche les dérivées de t ; on trouvera pour la $n^{\text{ième}}$ dérivée

$$(5) \qquad \frac{d^nt}{dx^n} = \frac{T_n}{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}},$$

T_n étant un polynôme de degré $n-1$ en x; on verra même aisément que T_n est de la forme

$$(6)\quad T_n = (n-1)!\,x^{n-1} + A_1 x^{n-3} + \ldots + A_\mu x^{n-2\mu-1} + \ldots.$$

En vertu de la formule (5), la relation (4) peut s'écrire

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\left[T_n(1-x^2)^{\frac{1}{2}-n}\right] - (2n+1)x\frac{d}{dx}\left[T_n(1-x^2)^{\frac{1}{2}-n}\right] - n^2 T_n(1-x^2)^{\frac{1}{2}-n} = 0;$$

effectuant et réduisant, on voit que T_n satisfait à l'équation différentielle

$$(1-x^2)\frac{d^2T_n}{dx^2} + (2n-3)x\frac{dT_n}{dx} - (n-1)^2 T_n = 0.$$

Cette équation, devant être identiquement vérifiée par le polynôme (6) qui représente T_n, permet de déterminer A_1, A_2, ...; à l'aide d'un calcul connu, on trouve

$$A_\mu = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-2\mu)}{(2\times 4\times 6\ldots 2\mu)^2}(n-1)!,$$

et l'on a tout ce qu'il faut pour développer θ suivant la série de Maclaurin

$$(7)\quad \begin{cases} \theta = \varphi - \dfrac{z}{\sin\varphi} - \cos\varphi\dfrac{z^2}{2\sin^3\varphi} - \left(\cos^2\varphi + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{z^3}{3\sin^5\varphi} - \ldots \\ \quad - \left[\cos^{n-1}\varphi + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2^2}\cos^{n-3}\varphi \right. \\ \quad\quad \left. + \dfrac{(n-1)\ldots(n-4)}{2^2 4^2}\cos^{n-5}\varphi + \ldots\right]\dfrac{z^n}{n\sin^{2n+1}\varphi} - \ldots \end{cases}$$

Quand on donne à z une des valeurs limites indiquées par le théorème de Cauchy, par exemple $1-\cos\varphi$, en supposant φ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on ne peut savoir *a priori* si la série (7) sera convergente; mais, dans le

cas que je considère, le terme général de la série devient, en faisant toujours $x = \cos\varphi$,

$$u_p = \frac{(1-\cos\varphi)^p}{p!}\,\frac{d^p t}{dx^p};$$

en vertu de cette formule, je puis, dans l'équation (4), remplacer les dérivées de t par les u correspondants, ce qui donne

$$\begin{aligned}&(n+1)(n+2)(1+\cos\varphi)u_{n+2}\\&\quad-(n+1)(2n+1)u_{n+1}\cos\varphi - n^2 u_n(1-\cos\varphi) = 0,\end{aligned}$$

d'où

$$(1+\cos\varphi)\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}\,\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{2n+1}{n+2}\cos\varphi\,\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{n^2(1-\cos\varphi)}{(n+1)(n+2)} = 0.$$

Cette relation montre sans difficulté que, pour n infini, $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$; on ne peut encore décider si la série considérée est convergente; on pose $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n}$, on désigne par α la limite de a pour n infini, et si dans la dernière relation on néglige les termes très petits par rapport à $\frac{1}{n}$, il reste

$$\begin{aligned}&(1+\cos\varphi)\left(1-\frac{2\alpha}{n}\right)\\&\quad-\left(2-\frac{3}{n}-\frac{2\alpha}{n}\right)\cos\varphi - \left(1-\frac{3}{n}\right)(1-\cos\varphi) = 0.\end{aligned}$$

Après des réductions considérables, cette relation donne simplement $\alpha = \frac{3}{2}$, ce qui, comme on sait, indique la convergence de la série; celle-ci représente, d'après le théorème d'Abel, ce que devient θ pour $z = 1 - \cos\varphi$, c'est-à-dire zéro. L'identité obtenue donne, après quel-

ques réductions faciles,

$$\varphi \cot \frac{1}{2}\varphi = 1 + \frac{\cos\varphi}{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi} + \ldots$$
$$+ \left[\cos^{n-1}\varphi + \frac{(n-1)(n-2)}{2^2}\cos^{n-3}\varphi + \ldots\right]$$
$$\times \frac{1}{n 2^{n-1}\cos^{2n-2}\frac{1}{2}\varphi} + \ldots;$$

pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on trouve une formule connue :

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} + \ldots.$$

Mais je ne m'étendrai pas davantage sur ces divers résultats.

SUR LES POINTS D'INFLEXION DES COURBES DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. J.-B. POMEY.

1. Je suppose qu'une courbe du troisième degré ait un point d'inflexion. En prenant ce point pour origine, l'équation de la courbe sera

$$(1) \qquad x^3 + yS = 0,$$

où S désigne un polynôme du second degré.

Les équations $x^3 = 0$ et $yS = 0$ sont celles de deux courbes du troisième degré, et la courbe proposée passe par leurs points d'intersection. Cette courbe peut être considérée comme la limite de la courbe

$$x(x-\alpha)(x-\alpha') + yS = 0,$$

lorsque α et α' tendent vers zéro. Si donc l'axe des y coupe S en deux points A et B, la conique a trois points

communs en A, ainsi qu'en B, avec la courbe du troisième degré. Elle lui est osculatrice en A et en B. Comme cinq points déterminent une conique, il y a donc cette relation entre les courbures aux points A et B, que la conique tangente en A et osculatrice en B est osculatrice en A. La forme (1) de la courbe reste la même, S variant pourtant, lorsque l'axe des y vient à changer de direction. Si A devient un deuxième point d'inflexion, la conique osculatrice en A doit se décomposer en deux droites, dont l'une est la tangente en A; donc l'autre droite est osculatrice en B, c'est-à-dire que B est lui même un point d'inflexion. Donc deux points d'inflexion, dont l'un est réel, déterminent une droite qui passe par un troisième point d'inflexion.

2. L'équation $F_4 = y^3 P_1 + x Q_3 = 0$, P_1 étant homogène et du premier degré en x et y, Q_3 homogène et du troisième degré en x et y, est l'équation d'une courbe du quatrième degré ayant un point d'inflexion à l'origine. De plus, $Q_3 = 0$ est une courbe du troisième degré qui a sur l'axe des x trois points communs avec $F_4 = 0$ en chacun des trois points où $Q_3 = 0$ coupe $F_4 = 0$. Si deux de ces points sont inflexionnels, le troisième l'est aussi. Donc :

Théorème. — *Si une droite passe par trois points d'inflexion sur une courbe du quatrième degré, elle la coupe encore en un quatrième point d'inflexion.*

ÉVALUATION GÉOMÉTRIQUE DE L'INTÉGRALE

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = f(\alpha);$$

PAR M. N. GOFFART.

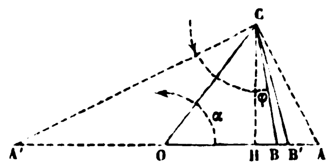
La forme du dénominateur conduit naturellement à considérer un triangle OBC, dans lequel



$$OC = 1, \quad OB = x, \quad BOC = \alpha,$$



Fig. 1.



et où, en conséquence,

$$CB^2 = 1 - 2x\cos\alpha + x^2.$$

Soit pris $BB' = dx$, et abaissons la perpendiculaire CH; faisons

$$HCB = \varphi,$$

il vient

$$d\varphi = BCB'.$$

En outre,

$$CH = \sin\alpha = BC \sin B,$$

$$BB' = \sin d\varphi \frac{BC}{\sin B'} = d\varphi \frac{BC}{\sin B} = d\varphi \frac{BC^2}{CH}.$$

La différentielle sous le signe $\int$ est donc

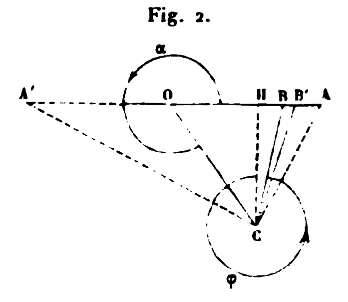
$$\frac{\sin\alpha\, dx}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = \frac{CH.BB'}{CB^2} = d\varphi = BCB$$

L'intégrale devant être prise relativement à x de -1 à $+1$, soit $OA = OA' = OC$; il en résulte que l'intégrale cherchée est la somme des éléments angulaires BCB' compris entre CA' et CA : c'est donc l'angle droit

$$A'CA = \frac{\pi}{2}.$$

La seconde figure montre que, l'angle α étant compris entre π et 2π, les accroissements $d\varphi$ sont négatifs;

Fig. 2.



l'angle BCB' est engendré dans le sens opposé à celui de la première figure, en sorte que l'intégrale est, dans ce cas, $-\frac{\pi}{2}$.

Généralement donc on a

$$f(\alpha) = \frac{\pi}{2} \quad \text{pour} \quad 2n\pi < \alpha < (2n+1)\pi,$$

$$f(\alpha) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{pour} \quad (2n-1)\pi < \alpha < 2n\pi;$$

d'où l'on conclut que la fonction $f(\alpha)$ est périodique.

SUR LES FONCTIONS HOMOGÈNES DE DEUX POLYNOMES U ET V, PREMIERS ENTRE EUX ET DE MÊME DEGRÉ EN x;

PAR M. L. MIRMAN,
Élève du lycée Saint-Louis.

Soient deux polynômes U *et* V *premiers entre eux, et de degré* m, *et soit une fonction homogène et entière de* U *et* V

$$F(U, V) = U^p + A_1 U^{p-1} V + \ldots + A_{p-1} U V^{p-1} + A_p V^p;$$

les racines communes aux équations $UV' - VU' = 0$ (U', V' *étant les dérivées de* U *et* V) *et* $F(U, V) = 0$ *sont racines multiples de cette dernière.*

Réciproquement, si la fonction homogène $F(U, V)$ *n'a pas en* U *et* V *de facteur multiple* $(aU + bV)^k$, *les racines multiples de l'équation* $F(U, V) = 0$ *sont racines de* $UV' - VU' = 0$.

En effet, la dérivée peut s'écrire

$$F' = pU^{p-1}U' + \ldots + A_k[(p-k)U^{p-k-1}U'V^k + kU^{p-k}V^{k-1}V'] + \ldots + pA_pV^{p-1}V'.$$

Soit α une racine commune à $F = 0$ et à $UV' - VU' = 0$. Soient u, v, u', v' les valeurs des polynômes correspondants pour cette valeur particulière de la variable; u et v sont différents de zéro, car, si u était nul, l'équation $F = 0$ montre que v devrait l'être aussi, ce qui est impossible, puisque U et V sont premiers entre eux.

On peut donc écrire

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} = l.$$

Remplaçons u' et v' par leurs valeurs dans la dérivée F'; nous aurons

$$F' = l_p u^p + \ldots + A_k[(p-k)\,lu^{p-k}v^k + klu^{p-k}v^k] + \ldots + plv^p$$

ou

$$F' = lpF,$$

et, comme $F = 0$, on a aussi $F' = 0$; donc cette racine α annule la dérivée F' : c'est donc une racine multiple de F.

Réciproquement, soit α une racine multiple de F; je dis que, pour cette valeur, on a

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v}.$$

Posons

$$\frac{u'}{u} = l, \quad \frac{v'}{v} = l + h;$$

je vais démontrer que h est nul.

En effet, en remplaçant, dans F', u' et v' par ces valeurs, on aura

$$lpu^p + A_1[(p-1)\,lu^{p-1}v + (l+h)\,u^{p-1}v] + \ldots$$
$$+ A_k[(p-k)\,lu^{p-k}v^k + k(l+h)\,u^{p-k}v^k] + \ldots + (l+h)pv^p = 0.$$

ou

$$lpF + h(A_1 u^{p-1}v + 2A_2 u^{p-2}v^2 + \ldots + kA_k u^{p-k}v^k + \ldots + pA_p v^p) = 0$$

Comme F est nul, il suffit de démontrer que la quantité entre parenthèses est différente de zéro; il suffit donc de faire voir que ce polynôme entier en x,

$$\Phi = A_1 U^{p-1}V + \ldots + kA_k U^{p-k}V^k + \ldots + pA_p V^p,$$

ne peut avoir de racine commune avec le polynôme F.

En effet, posons

$$\frac{U}{V} = \rho;$$

nous pouvons écrire

$$F = V^p(\rho^p + A_1\rho^{p-1} + \ldots + A_k\rho^{p-k} + \ldots + A_p),$$
$$\Phi = V^p(A_1\rho^{p-1} + 2A_2\rho^{p-2} + \ldots + kA_k\rho^{p-k} + \ldots + pA_p).$$

Or, supposons que F et Φ, ou ce qui revient au même, puisque V ne peut être nul dans ces conditions, que les quantités entre crochets s'annulent toutes deux pour $x = \alpha$, c'est-à-dire pour $\rho = \beta$. Désignons ces polynômes entiers en ρ par $f(\rho)$ et $\varphi(\rho)$. On vérifiera facilement que l'on a identiquement

$$pf(\rho) = \rho f'(\rho) + \varphi(\rho);$$

donc cette valeur $\rho = \beta$ annulerait $f'(\rho)$ (¹) et serait racine multiple de $f(\rho)$. Si donc nous supposons que $f(\rho)$ n'a pas en ρ de racine multiple, c'est-à-dire que $F(U, V)$ n'admet pas de facteur de forme $(aU + bV)^k$, F et Φ ne peuvent avoir en x de racine commune; donc $h = 0$, et la racine multiple considérée α annule

$$UV' - VU' = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — L'expression $UV' - VU'$, où U et V sont des polynômes de degré m, est de degré $2m - 2$; donc, si la fonction homogène $F(U, V)$ satisfait à la condition énoncée, l'équation $F(U, V) = 0$, de degré p en U et V, de degré mp en x, ne peut avoir en x plus de $2(m - 1)$ racines doubles, quel que soit p.

Autre corollaire. — L'expression

$$\frac{UV' - VU'}{\sqrt{F(U, V)}}$$

[les coefficients de U et V étant tels que F ait $2(m - 1)$

(¹) A moins que $\beta = 0$, mais alors A_p serait nul, et l'on mettrait u en facteur dans le coefficient de h.

racines doubles] peut s'écrire

$$\frac{1}{M\sqrt{f(x)}},$$

M étant une constante, et $f(x)$ un polynôme entier en x de degré

$$mp-4m+4 \quad \text{ou} \quad m(p-4)+4.$$

Cette proposition est une généralisation d'un théorème de Jacobi qu'on peut énoncer de la façon suivante :

Si l'on considère l'expression

$$\frac{UV'-VU'}{\sqrt{AU^4+BUV^3+CU^2V^2+DUV^3+EV^4}},$$

et qu'on détermine les coefficients de U *et* V, *de façon que le polynôme sous le radical ait toutes ses racines doubles, sauf quatre, l'expression peut s'écrire*

$$\frac{1}{M\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}.$$

Cas particuliers :

1° Toute racine double de $aU+bV=0$ est racine de $UV'-VU'=0$.

2° Toute racine double de $aU^2+2bUV+cV^2=0$ est racine de $UV'-VU'=0$ si b^2-ac est $\neq 0$.

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES RELATIVES AUX INTÉGRALES DÉFINIES ET INDÉFINIES;

PAR M. L.-A. MONY.

I. Considérons une fonction $f(u, v, w, \ldots)$ de n quantités $u, v, w, \ldots$ qui varient simultanément en

satisfaisant aux relations (1)

$$(1)\qquad u=\lambda(z),\quad v=\varphi(z),\quad w=\psi(z),\quad \ldots,$$

où z est une variable indépendante. Si l'on donne à z un accroissement dz, u, v, w, ... ont pour différentielles du, dv, dw, ..., et l'on a

$$df(u, v, w, \ldots)=\frac{df}{du}du+\frac{df}{dv}dv+\frac{df}{dw}dw+\ldots.$$

Si l'on intègre entre les limites z_1 et z_2 et si l'on nomme $u_1, v_1, w_1, \ldots,$ et $u_2, v_2, w_2, \ldots,$ les valeurs correspondantes de $u, v, w, \ldots,$ on a

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &f(u_2, v_2, w_2, \ldots)-f(u_1, v_1, w_1, \ldots)\\ &\quad=\int_{u_1}^{u_2}\frac{df}{du}du+\int_{v_1}^{v_2}\frac{df}{dv}dv+\int_{w_1}^{w_2}\frac{df}{dw}dw+\ldots,\end{aligned}\right.$$

en supposant que dans la fonction $\frac{df}{du}$ on a remplacé v, w, ... par leurs valeurs en fonction de u tirées des équations (1), que dans la fonction $\frac{df}{dv}$ on a remplacé u, w, ... par leurs valeurs en fonction de v tirées des équations (1), ... Mais la valeur d'une intégrale définie étant indépendante du nom donné à la variable qui se trouve sous le signe $\int$, on peut remplacer, dans chacune des fonctions $\frac{df}{du}, \frac{df}{dv}, \frac{df}{dw}, \ldots,$ les variables u, v, w, ..., qui entrent alors isolément dans chacune d'elles, par une même variable x. On a ainsi une relation entre n intégrales définies, qui permet d'obtenir l'une d'elles, lorsque l'on connait les $n-1$ autres. Les limites u_1, u_2 de l'une des intégrales sont arbitraires, mais leur choix détermine celles des autres intégrales. La connaissance de $n-1$ de ces intégrales sous forme indéfinie permet d'obtenir la $n^{\text{ième}}$ sous la même forme;

on n'aura en effet qu'à remplacer u_2 par x dans la formule (2), et cette formule donnera

$$\int_{u_1}^{x} \frac{df}{du}\, dx$$

à l'aide des autres intégrales.

Si les relations (1) sont

$$u = z, \quad v = \varphi(z), \quad w = \psi(z), \quad \ldots,$$

ou simplement

$$(3) \qquad v = \varphi(u), \quad w = \psi(u), \quad \ldots,$$

ce qui revient à prendre u comme variable indépendante, la relation (2) devient (4), en désignant par Φ la fonction inverse de φ, Ψ la fonction inverse de ψ, ... :

$$(4) \left\{\begin{aligned} & f(u_2, v_2, w_2, \ldots) - f(u_1, v_1, w_1, \ldots) \\ & \quad = \int_{u_1}^{u_2} \frac{df}{du}[x, \varphi(x), \psi(x) \ldots]\, dx \\ & \quad + \int_{\varphi(u_1)}^{\varphi(u_2)} \frac{df}{dv}\{\Phi(x), x, \psi[\Phi(x)], \ldots\}\, dx \\ & \quad + \int_{\psi(u_1)}^{\psi(u_2)} \frac{df}{dw}\{\Psi(x), \varphi[\Psi(x)], x, \ldots\}\, dx + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Cette formule (4) est notre formule fondamentale; en choisissant convenablement les fonctions f, φ, ψ, ..., elle donne des théorèmes intéressants qui font l'objet de ce travail.

II. Considérons en particulier le cas où il n'entre que deux quantités u et v dans la fonction f.

Posons d'abord $f(u, v) = u \times v$ avec $v = \varphi(u)$.

La formule (4) donne, en y remplaçant u_1 par x_1, u_2 par x_2,

$$(5) \quad x_2\varphi(x_2) - x_1\varphi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\, dx + \int_{\varphi(x_1)}^{\varphi(x_2)} \Phi(x)\, dx.$$

De la formule (5) on déduit ce théorème important :

THÉORÈME. — *Si l'on connaît l'intégrale définie d'une fonction $\varphi(x)$ entre certaines limites x_1 et x_2, on en déduit l'intégrale définie, entre les limites $\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$, de la fonction inverse $\Phi(x)$;*

Et aussi, en vertu d'une remarque faite plus haut, ce théorème encore plus utile :

THÉORÈME. — *Si l'on connaît l'intégrale indéfinie d'une fonction $\Phi(x)$, on en déduit immédiatement celle de la fonction inverse $\varphi(x)$.*

On peut donner de la formule (5) une démonstration géométrique.

Considérons la courbe représentée par l'équation $y=\varphi(x)$ en coordonnées rectangulaires. Soient x_1, y_1 et x_2, y_2 les coordonnées des points M_1 et M_2 de la courbe, P_1 et P_2 les pieds de leurs ordonnées et Q_1 et Q_2 les pieds de leurs abscisses; on a évidemment, si O est l'origine des coordonnées,

$$\begin{aligned}&\text{surface } M_2P_2OQ_2 - \text{surface } M_1P_1OQ_1\\ &\quad = \text{surface } M_1P_1P_2M_2 + \text{surface } M_1Q_1Q_2M_2;\end{aligned}$$

la relation (5) n'est que la traduction analytique de cette égalité.

Dans le cas particulier que nous examinons, la relation (2) prend la forme

$$(6) \qquad u_2v_2 - u_1v_1 = \int_{u_1}^{u_2} v\,du + \int_{v_1}^{v_2} u\,dv;$$

supposons que la relation qui unit u à v soit symétrique, on en tirera

$$u=\varphi(v), \quad v=\varphi(u);$$

les fonctions φ et Φ seront les mêmes; nous aurons

alors une relation (6) entre deux intégrales définies ne différant que par leurs limites. On en déduit immédiatement la relation (7) entre des intégrales indéfinies; désignant par $I(x)$ l'intégrale indéfinie $\int \varphi(x)dx$,

$$(7) \qquad I(x) + I[\varphi(x)] = x\varphi(x) + \text{const.}$$

Il n'est pas nécessaire pour obtenir des relations analogues à (6) et (7) que les fonctions φ et Φ soient les mêmes, il suffit que, par des changements de variables, des intégrations par parties ou par tout autre procédé, on puisse ramener à une même forme $\int \varphi(x)dx$ et $\int \Phi(x)dx$, ces intégrales ne différant après cette réduction que par les limites entre lesquelles elles sont prises.

III. Si l'on fait d'autres hypothèses sur la forme de la fonction $f(u, v)$, on obtiendra des formules de transformation analogues aux précédentes, et leur choix plus ou moins heureux donnera des résultats plus ou moins intéressants.

Posons d'abord $f(u, v) = \frac{u}{v}$ avec $v = \varphi(u)$, la formule (4) donne, en y remplaçant u_1 par x_1 et u_2 par x_2, la formule

$$(8) \qquad \frac{x_2}{\varphi(x_2)} - \frac{x_1}{\varphi(x_1)} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\varphi(x)} - \int_{\varphi(x_1)}^{\varphi(x_2)} \frac{\Phi(x)}{x^2}\,dx;$$

et, pour les intégrales indéfinies, la formule

$$(9) \qquad \frac{x}{\varphi(x)} - \frac{x_1}{\varphi(x_1)} = \int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\varphi(x)} - \int_{\varphi(x_1)}^{\varphi(x)} \frac{\Phi(x)dx}{x^2};$$

mais la formule (8) peut être écrite sous la forme

$$(10) \qquad \frac{\Phi(x_2)}{x_2} - \frac{\Phi(x_1)}{x_1} = \int_{\Phi(x_1)}^{\Phi(x_2)} \frac{dx}{\varphi(x)} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Phi(x)}{x^2}\,dx;$$

les deux intégrales $\int \frac{dx}{\varphi(x)}$ et $\int \frac{\Phi(x)}{x^2} dx$ se ramènent donc indifféremment l'une à l'autre.

Posons encore $f(u, v) = \sqrt{u} \times \sqrt{v}$ avec $v = \varphi(u)$, on obtient une formule qui permet de ramener l'une à l'autre les deux intégrales $\int \sqrt{\frac{\varphi(x)}{x}} dx$ et $\int \sqrt{\frac{\Phi(x)}{x}} dx$.

Posons enfin $f(u, v) = u \times \mathrm{L}v$ avec $v = \varphi(u)$, on obtient une formule qui permet de ramener l'une à l'autre les deux intégrales $\int \mathrm{L}[\varphi(x)] dx$ et $\int \frac{\Phi(x)}{x} dx$.

On peut varier à l'infini les hypothèses sur la forme de la fonction f; chacune de ces hypothèses donnera naissance à des formules analogues aux précédentes.

On peut aussi combiner entre eux ces divers procédés de transformation, et transformer ainsi une intégrale d'une infinité de manières.

On peut enfin considérer des fonctions f de plus de deux variables, on obtient des relations analogues aux précédentes où entrent plus de deux intégrales.

IV. Revenons à la formule (2) qui nous a servi de point de départ. Dans le cas particulier d'une fonction de deux variables $f(u, v)$, on a

$$(11) \quad \begin{cases} f(u_2, v_2) - f(u_1, v_1) \\ \quad = \int_{u_1}^{u_2} \frac{df}{du}(u, v) du + \int_{v_1}^{v_2} \frac{df}{dv}(u, v) dv. \end{cases}$$

Supposons que la relation qui unit v à u soit $v = u$; en remplaçant dans (11) u_2 et v_2 par x_2, u_1 et v_1 par x_1, il vient

$$(12) \quad \begin{cases} f(x_2, x_2) - f(x_1, x_1) \\ \quad = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{du}(x, x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{dv}(x, x) dx. \end{cases}$$

Donc, si une fonction de la variable x peut être considérée comme la dérivée partielle par rapport à u d'une fonction connue $f(u, v)$, lorsqu'on fait dans cette dérivée partielle $u = v = x$, on obtiendra immédiatement l'intégrale indéfinie ou définie entre certaines limites de la différentielle formée par cette fonction multipliée par dx, si l'on connaît l'intégrale indéfinie ou l'intégrale définie entre les mêmes limites de la différentielle partielle de $f(u, v)$ par rapport à v où l'on fait après la différentiation $u = v = x$.

Ce théorème donne un mode de transformation plus général que celui de l'intégration par parties, qu'il comprend d'ailleurs dans le cas particulier où

$$f(u, v) = \varphi(u) \times \psi(v).$$

Lorsqu'on aura à chercher l'expression d'une intégrale $\int \varphi(x) dx$, il faudra remplacer dans la fonction φ la lettre x, soit par u, soit par v, de telle façon que la fonction que l'on substituera ainsi à $\varphi(x)$ puisse être considérée comme la dérivée partielle par rapport à u d'une fonction connue dont la différentielle partielle par rapport à v, où l'on fera $u = v = x$, sera facile à intégrer.

Les considérations qui précèdent s'étendent facilement à des fonctions de plus de deux variables

$$f(u, v, w, \ldots).$$

On arrive à cette conclusion :

Pour intégrer une différentielle $\varphi(x) dx$, on peut y remplacer la lettre x convenablement par les lettres u, u, w, ..., de telle sorte que cette différentielle soit, après cette substitution, la différentielle partielle par rapport à u d'une fonction connue dont les autres diffé-

rentielles partielles relatives à v, w,... soient, lorsqu'on y fait $u = v = w = \ldots = x$, faciles à intégrer.

SUR L'ENVELOPPE DES DROITES QUI COUPENT DEUX CERCLES HARMONIQUEMENT;

Par M. H. PICQUET.

J'ai démontré dans ma *Géométrie analytique* (p. 568), comme conséquence de propriétés des invariants communs à deux coniques, que *l'enveloppe des droites qui coupent deux cercles harmoniquement est une conique ayant pour foyers les centres des deux cercles et tangente aux tangentes à ces cercles en leurs points d'intersection.* En voici une autre démonstration qui n'a peut-être pas été remarquée.

Soient O et O' les centres des deux cercles, R et R' leurs rayons, A et B leurs points d'intersection supposés réels : d'après la définition de la conique en question, le cercle O'', lieu des projections des foyers sur les tangentes, passe par les points A et B. Cela posé, soient α et β les points d'intersection d'une tangente quelconque de cette conique avec le cercle O, soient γ et δ ses points d'intersection avec le cercle O'. Projetons le point O en C sur cette droite; C est le milieu de $\alpha\beta$ et appartient au cercle O''. On a donc

$$\overline{CO}^2 + \overline{CO'}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AO'}^2 = R^2 + R'^2$$

ou

$$R^2 - \overline{CO}^2 = \overline{CO'}^2 - R'^2,$$

ou

$$\overline{C\alpha}^2 = C\gamma . C\delta. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

N. B. — Cette démonstration ne préjuge rien sur la réalité des points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; elle prouve que, quoi qu'il arrive, ils sont conjugués harmoniques. Mais on sait qu'alors, si deux points conjugués sont imaginaires conjugués, les deux autres sont nécessairement réels : il suit de là qu'un des deux couples $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ est toujours réel.

Si les points d'intersection A et B des deux cercles étaient imaginaires, il est clair qu'aucune droite réelle ne pourrait rencontrer les deux cercles en quatre points harmoniques.

SUR UNE IDENTITÉ ALGÉBRIQUE;

PAR M. WEILL.

Je me propose de trouver quatre polynômes entiers satisfaisant à l'identité

$$X^2Y + Y^2Z + Z^2U + U^2X = 0.$$

En posant

$$Y = \lambda X, \quad Z = \mu X, \quad U = \rho X,$$

on a

$$\lambda + \lambda^2\mu + \mu^2\rho + \rho^2 = 0;$$

d'où

$$1 - 4\mu(\mu^2\rho + \rho^2) = K^2, \quad \lambda = \frac{-1 \pm K}{2\mu}$$

et

$$\mu^6 - \mu(K^2 - 1) = L^2, \quad \rho = \frac{-\mu^3 \pm L}{2\mu}.$$

On peut écrire la dernière équation sous la forme

$$\mu^6 - L^2 = \mu(K^2 - 1).$$

On satisfera à cette relation si l'on prend

$$\mu^3 - L = \mu h(K-1), \quad \mu^3 + L = \frac{K+1}{h},$$

d'où

$$K = \frac{2\mu^3 h + \mu h^2 - 1}{\mu h^2 + 1}, \quad L = \frac{\mu^3 - \mu^4 h^2 + 2\mu h}{\mu h^2 + 1}.$$

A ces valeurs correspondent, pour ρ et λ, les valeurs

$$\rho' = \frac{h - h^2\mu^3}{\mu h^2 + 1}, \qquad \rho'' = \frac{-h - \mu^2}{\mu h^2 + 1},$$

$$\lambda' = \frac{\mu^3 h - 1}{\mu(\mu h^2 + 1)}, \quad \lambda'' = \frac{-h^2 - \mu^2 h}{\mu h^2 + 1},$$

Si l'on associe une des valeurs de ρ avec une des valeurs de λ, successivement, on obtient quatre systèmes de solutions. Considérons le système ρ', λ'.

Il donne

$$U = h\,\frac{X^3 - hZ^3}{X^2 + Xh^2Z}, \quad Y = \frac{-UX}{hZ};$$

d'où

$$U = h(X - h^2Z) + \frac{h^2Z^2}{X}\,\frac{Xh^3 - Z}{X + h^2Z}.$$

On peut poser

$$Xh^3 - Z = P(X + h^2Z),$$
$$h^2Z^2P = RX,$$

et l'on a successivement

$$Z(Ph^2 + 1) = X(h^3 - P),$$
$$X = Q(Ph^2 + 1),$$
$$Z = Q(h^3 - P),$$
$$h^2Q^2(h^3 - P)^2P = RQ(Ph^2 + 1),$$
$$Q = S(Ph^2 + 1),$$
$$R = Sh^2P(h^3 - P)^2,$$
$$Y = \frac{-UX}{hZ} = \frac{-X[X - h^2Z + ShP(h^3 - P)^2]}{Z};$$

d'où, en remplaçant X et Z par leurs valeurs,

$$S = T(h^3 - P).$$

On peut faire, d'ailleurs, $T = 1$, et l'on obtient les formules suivantes :

$$(I)\quad \begin{cases} X = (h^3 - P)(Ph^2 + 1)^2, \\ Z = (h^3 - P)^2(Ph^2 + 1), \\ Y = -(Ph^2 + 1)(P^3 h + 3Ph^2 - h^5 + 1), \\ U = h(h^3 - P)(P^3 h + 3Ph^2 - h^5 + 1). \end{cases}$$

Si l'on remplace X, Y, Z, U par leurs valeurs dans l'identité proposée, on obtient

$$(A)\quad h(P - h^3)^3 + (Ph^2 + 1)^3 \equiv (1 + h^5)(P^3 h + 3Ph^2 - h^5 + 1).$$

L'identité (A) va nous donner des résultats relatifs à certaines équations indéterminées; et d'abord, elle donne une infinité de solutions, avec un paramètre arbitraire λ, de l'équation

$$ax^3 + y^3 = (1 + a^5)z.$$

Ce sont

$$x = \lambda - a^3,$$
$$y = \lambda a^2 + 1,$$
$$z = \lambda^3 a + 3\lambda a^2 - a^5 + 1.$$

De même, l'équation

$$x^3 + y^3 = (1 + a^{15})z$$

admet comme solutions

$$x = \lambda a - a^{10},$$
$$y = 1 + \lambda a^6,$$
$$z = \lambda^3 a^3 + 3\lambda a^6 - a^{15} + 1.$$

Dans l'identité (A) posons $P = \alpha h^3$ et disposons de α de manière que la fonction

$$P^3 h + 3Ph^2 - h^5 + 1$$

soit carré parfait; on trouve $\alpha = 1$, solution illusoire, et $\alpha = \frac{1}{4}$; on en déduit, après quelques transformations et en posant $h^5 = z$, l'identité fort simple

$$(B)\quad (z + 4)^3 - 27z^2 \equiv (1 + z)(z - 8)^2.$$

De cette identité, résulte *une* solution d'une classe d'équations indéterminées ; a et m étant deux entiers quelconques, l'équation

$$x^3 + y^3 = (1 + a^{3m}) z^2$$

a pour solution

$$x = -3a^{2m},$$
$$y = a^{3m} + 4,$$
$$z = a^{3m} - 8.$$

L'équation

$$a^2 x^3 + y^3 = (1 + a^{3m+1}) z^2$$

admet comme solution

$$x = -3a^{2m},$$
$$y = 4 + a^{3m+1},$$
$$z = a^{3m+1} - 8.$$

Enfin l'équation

$$a x^3 + y^3 = (1 + a^{3m+2}) z^2$$

admet comme solution

$$x = -3a^{2m+1},$$
$$y = 4 + a^{3m+2},$$
$$z = a^{3m+2} - 8.$$

L'identité (B) se généralise en remplaçant z par $\frac{z}{t}$ et donne

$$\text{(C)} \qquad (z + 4t)^3 - 27tz^2 = (z + t)(z - 8t)^2.$$

Elle fournit *une* solution de nouvelles équations indéterminées, que l'on forme aisément, et qui sont

$$x^3 + y^3 = b(1 + a^{3m}) z^2,$$
$$x^3 + b^2 y^3 = b(1 + ba^{3m}) z^2,$$
$$x^3 + by^3 = b(1 + b^2 a^{3m}) z^2,$$
$$a^2 x^3 + y^3 = b(1 + a^{3m+1}) z^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$a x^2 + b y^2 = z^3.$$

Reprenons l'étude du système ρ', λ' et la valeur

$$U = (X - h^2 Z)h + \frac{h^2 Z^2}{X}\,\frac{Xh^3 - Z}{X + h^2 Z}.$$

On peut poser

$$Xh^3 - Z = RX,$$
$$h^2 Z^2 R = S(X + h^2 Z).$$

En développant les calculs, on arrive à une solution très simple du problème et qui est donnée par les formules

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} X = P(1 + Ph^2), \\ Y = hP^3 - 1, \\ Z = P^2(1 + Ph^2), \\ U = hP(1 - hP^3). \end{cases}$$

Le système ρ', λ'' donne la solution

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} X = (Ph^2 + 1)^2, \\ Y = -h(Ph^2 + 1)(P^2 + h), \\ Z = (Ph^2 + 1)(h^3 - P), \\ U = h(P^2 h + 3Ph^2 - h^5 + 1). \end{cases}$$

Le système ρ'', λ'' donne la solution

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} X = 1 - h^2 Z, \\ U = 2h^3 Z - h - Z^2(h^5 + 1), \\ Y = -2h^4 Z + h^2 + hZ^2(h^5 + 1). \end{cases}$$

Toutes ces formules, dans lesquelles P et h sont des quantités quelconques, peuvent se généraliser en remplaçant P et h par $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$, et supprimant ensuite le dénominateur commun ; il ne restera plus qu'à remplacer A, B, C, D par des polynômes entiers par rapport à des variables quelconques, pour avoir des systèmes de solutions comportant une très grande indétermination ; de là on pourra tirer un nombre indéfini de nouvelles identités algébriques.

SUR QUELQUES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES;

PAR M. WEILL.

I. Soit l'équation

$$ax^2 + by^2 = z^{2p+1},$$

dans laquelle a, b et p sont des entiers donnés quelconques. Posons

$$z = au^2 + bt^2,$$

nous pourrons poser

$$x\sqrt{a} + yi\sqrt{b} = (u\sqrt{a} + ti\sqrt{b})^{2p+1}$$

et prendre

$$x = u^{2p+1}a^p - C^2_{2p+1}bt^2u^{2p-1}a^{p-1} + C^4_{2p+1}b^2t^4u^{2p-3}a^{p-2} + \ldots,$$
$$y = C'_{2p+1}u^{2p}a^p t - C^3_{2p+1}u^{2p-2}a^{p-1}bt^3 + \ldots.$$

On a ainsi *un* système de solutions, avec deux entiers arbitraires u et t, de l'équation proposée qui présente une grande généralité.

II. Soit l'équation

$$x^2 + by^2 = z^m,$$

m étant un entier quelconque.

Posons

$$z = u^2 + bt^2,$$

nous pourrons poser

$$x + yi\sqrt{b} = (u + ti\sqrt{b})^m$$

et prendre

$$x = u^m - C_m^2 bt^2 u^{m-2} + \ldots,$$
$$y = C'_m u^{m-1} t - C_m^3 u^{m-3} t^3 b + \ldots,$$

et l'on a *un* système de solutions, avec deux entiers arbitraires u et t, de l'équation.

III. Soit l'équation

$$x^2 - Ay^2 = N^2,$$

A et N étant deux entiers positifs donnés.

On a

$$x^2 = (yi\sqrt{A} + N)(yi\sqrt{A} - N).$$

Posons

$$x = (ui\sqrt{A} + t)(ui\sqrt{A} - t),$$

d'où

$$t^2 - Au^2 = N, \quad 2tu = y,$$
$$x = Au^2 + t^2, \quad x + y\sqrt{A} = (u\sqrt{A} + t)^2.$$

Considérons

$$x_1 + y_1\sqrt{A} = (y\sqrt{A} + x)^2 = (u\sqrt{A} + t)^{2.2},$$
$$x_2 + y_2\sqrt{A} = (y_1\sqrt{A} + x_1)^2 = (u\sqrt{A} + t)^{2.2.2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x_p + y_p\sqrt{A} = (u\sqrt{A} + t)^{2^{p+1}}.$$

On voit que, si l'on connaît une solution entière u, t de l'équation

$$t^2 - Au^2 = N,$$

on en déduira une solution entière x, y de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = N^2,$$

puis une solution entière x_1, y_1 de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = N^4,$$

puis une solution x_2, y_2 de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = N^8,$$

et ainsi de suite.

En particulier, nos formules donnent une suite de solutions de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = 1,$$

quand on connait une première solution ; soient $x = \alpha$, $y = \beta$ cette solution ; p étant un entier quelconque, les valeurs α_p, β_p, données par l'égalité

$$\alpha_p + \beta_p \sqrt{A} = (\alpha + \beta \sqrt{A})^{2p+1},$$

formeront une solution; et les valeurs $N^h \alpha_p$ et $N^h \beta_p$ formeront une solution de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = N^{2h}.$$

On connait l'application des fractions continues à l'équation

$$x^2 - Ay^2 = 1.$$

IV. Soient des quantités successives $a, a_1, a_2, \ldots$, liées par la relation récurrente

$$a_k = 2a_{k-1}^2 - 1.$$

Posons

$$a^2 - Au^2 = 1, \quad y_1 = 2au,$$
$$a_1 = Au^2 + a^2 = 2a^2 - 1,$$
$$a_1 + y_1\sqrt{A} = (u\sqrt{A} + a)^2,$$
$$a_2 + y_2\sqrt{A} = (a_1 + y_1\sqrt{A})^2,$$

d'où

$$a_2 = a_1^2 + Ay_1^2 = 2a_1^2 - 1$$

et

$$a_2 + y_2\sqrt{A} = (u\sqrt{A} + a)^{2^2},$$
$$a_2 = A^2u^4 + 6a^2Au^2 + a^4 = (a^2 - 1)^2 + 6a^2(a^2 - 1) + a^4.$$

En posant

$$2^p = 2m, \quad m = 2^{p-1},$$

on aura

$$a_p + y_p\sqrt{A} = (u\sqrt{A} + a)^{2m},$$
$$a_p = (Au^2)^m + C_{2m}^2 a^2 (Au^2)^{m-1} + \ldots,$$
$$a_p = (a^2 - 1)^m + C_{2m}^2 a^2 (a^2 - 1)^{m-1} + \ldots.$$

On peut rapprocher cette formule de celle qui donne le développement de $\cos m\varphi$ en fonction de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, tiré de la formule de Moivre dans le cas particulier où m est une puissance de 2 ; mais le procédé actuel pour trouver la valeur de a_p est affranchi de la considération des imaginaires. On trouve, en développant,

$$2a_p = (2a)^{2m} - \frac{2m}{1}(2a)^{2m-2} + \frac{2m(2m-3)}{1.2}(2a)^{2m-4}$$
$$- \frac{2m(2m-4)(2m-5)}{1.2.3}\,2a^{2m-6}$$
$$+ \frac{2m(2m-5)(2m-6)(2m-7)}{1.2.3.4}(2a)^{2m-8} - \ldots.$$

V. En remplaçant, dans la loi de récurrence indiquée, a_p, a_{p-1}, ... par $\lambda a_p + \beta$, $\lambda a_{p-1} + \beta$, on voit que l'équation aux différences finies

$$\varphi(n) = A[\varphi(n-1)]^2 + B\varphi(n-1) + C$$

peut s'intégrer au moyen du développement de $\cos m\varphi$ en fonction de $\cos\varphi$, quand on a la relation

$$C = \frac{B^2 - B - 2}{2A}.$$

Considérons encore des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_p$, liées par la formule de récurrence

$$a_p = 4a_{p-1}^3 - 3a_{p-1}.$$

Si a_1 est moindre que 1, on pourra poser

$$a_1 = \cos\varphi,$$
$$a_2 = \cos 3\varphi,$$
$$a_3 = \cos 3^2\varphi,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

donc, dans ce cas, a_p s'obtiendra en fonction de a_1 par le développement connu de $\cos m\varphi$; le résultat trouvé ainsi subsiste évidemment, même quand a_1 est plus grand que 1, c'est-à-dire quelconque.

En posant

$$a_p = \lambda\varphi(p) + \beta,$$

on voit que l'équation

$$\varphi(n) = A[\varphi(n-1)]^3 + B[\varphi(n-1)]^2 + \frac{B^2 - 9A}{3A}\varphi(n-1) + \frac{B^3 - 36AB}{27A^2}$$

s'intègre au moyen du développement de $\cos m\varphi$ en fonction de $\cos\varphi$.

On peut continuer l'application de ce procédé. On généralise les formules précédentes, en remplaçant $\varphi(n)$ par une fonction rationnelle ou même irrationnelle de $\psi(n)$, en désignant par $\psi(n)$ une fonction nouvelle, et l'on arrive ainsi à former des équations aux différences finies que l'on intègre par le procédé indiqué, et dont l'intégration directe présente des difficultés.

APPLICATION D'UN PROCÉDÉ PARTICULIER A LA RECHERCHE DE L'INTÉGRALE

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^2};$$

PAR M. J.-B. POMEY.

Je cherche $2\int\int \frac{\alpha\, dz\, d\alpha}{(1+\alpha^2 z^2)^2}$. En intégrant par rapport à α, j'obtiens successivement

$$\int dz \int \frac{d(\alpha^2)}{(1+\alpha^2 z^2)^2} = \int \frac{dz}{z^2} \int \frac{d(1+\alpha^2 z^2)}{(1+\alpha^2 z^2)^2} = \int - \frac{dz}{z^2}\,\frac{1}{1+\alpha^2 z^2}.$$

L'intégration en z est alors facile, car on a successive-

ment

$$\int \frac{d\left(\frac{1}{z}\right)}{1+\alpha^2 z^2} = \int \frac{d\left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z^2}+\alpha^2-\alpha^2\right)}{\frac{1}{z^2}+\alpha^2}$$

$$= \int d\left(\frac{1}{z}\right) - \alpha^2 \int \frac{d\frac{1}{z}}{\frac{1}{z^2}+\alpha^2}$$

$$= \frac{1}{z} - \alpha \operatorname{arc tang} \frac{1}{\alpha z} + \text{const.};$$

donc on a

$$2\int\int \frac{\alpha\, dz\, d\alpha}{(1+\alpha^2 z^2)^2} = \frac{1}{z} - \alpha \operatorname{arc tang} \frac{1}{\alpha z} + \text{const.}$$

En dérivant par rapport à α, il vient

$$2\int \frac{\alpha\, dz}{(1+\alpha^2 z^2)^2} = -\operatorname{arc tang} \frac{1}{\alpha z} + \alpha \frac{\frac{1}{z\alpha^2}}{1+\frac{1}{\alpha^2 z^2}} + \text{const.}$$

En faisant $\alpha = 1$, il vient

$$2\int \frac{dz}{(1+z^2)^2} = -\operatorname{arc tang} \frac{1}{z} + \frac{z}{1+z^2} + \text{const.}$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \text{const.} + \operatorname{arc tang} z + \frac{z}{1+z^2},$$

et le problème d'intégration est résolu.

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME D'ALGÈBRE;

PAR M. X. ANTOMARI,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Rennes.

Étant donnés deux polynômes entiers en x et premiers entre eux, U_m et V_n, de degrés respectifs m et n, on démontre dans la théorie du plus grand commun diviseur

algébrique qu'il existe deux polynômes entiers en x, X et Y, tels que l'on ait identiquement

$$\text{(1)}\qquad U_m X + V_n Y = 1.$$

Nous allons démontrer qu'il existe deux polynômes entiers en x, X et Y, tels que l'on ait plus généralement l'identité

$$\text{(2)}\qquad U_m X + V_n Y = f(x),$$

dans laquelle $f(x)$ est un polynôme entier en x de degré $m+n-1$ au plus, mais non identiquement nul.

Soient, en effet,

$$U_m = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m,$$
$$V_n = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n,$$
$$f(x) = c_0 x^{m+n-1} + c_1 x^{m+n-2} + \ldots + c_{m+n-1}.$$

Par hypothèse, l'un, au moins, des coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_{m+n-1}$ est différent de zéro.

Posons

$$X = \alpha_0 x^{n-1} + \alpha_1 x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1},$$
$$Y = \beta_0 x^{m-1} + \beta_1 x^{m-2} + \ldots + \beta_{m-1},$$

puis identifions l'expression $U_m X + V_n Y$ avec $f(x)$. Nous obtenons ainsi, pour déterminer $m+n$ indéterminées, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$, les $m+n$ équations linéaires et non homogènes

$$\begin{array}{lll}
a_0\alpha_0 & + b_0\beta_0 & = c_0, \\
a_1\alpha_0 + a_0\alpha_1 & + b_1\beta_0 + b_0\beta_1 & = c_1, \\
a_2\alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_0\alpha_2 & + b_2\beta_0 + b_1\beta_1 + b_0\beta_2 & = c_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots, \\
\qquad a_m\alpha_{n-1} & \qquad + b_n\beta_{m-1} & = c_{m+n-1}.
\end{array}$$

Remarquons que, dans ces équations, le déterminant des inconnues est le résultant des deux équations $U_m = 0$, $V_n = 0$, qui n'ont aucune racine commune par hypo-

thèse. Il en résulte que ces équations sont vérifiées par un système unique de valeurs des inconnues. Ces inconnues ne sont d'ailleurs pas toutes nulles, puisque l'une, au moins, des quantités c_0, c_1, c_2, ... n'est pas nulle. Il résulte de là que, pour un polynôme donné $f(x)$, il existe un couple unique de polynômes X et Y, vérifiant l'identité (2).

Observation. — Le résultat qui précède peut servir :

1° A établir simplement l'identité

$$\frac{F(x)}{f(x)\varphi(x)} = \frac{f_1(x)}{f(x)} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$$

que l'on rencontre dans la décomposition des fractions rationnelles;

2° A calculer les coefficients dans la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, notamment dans le cas des racines imaginaires.

Nous nous contentons de signaler ces deux applications

SUR LE COEFFICIENT DE STABILITÉ DES MASSIFS

(Extraits d'une lettre à M. Deschamps);

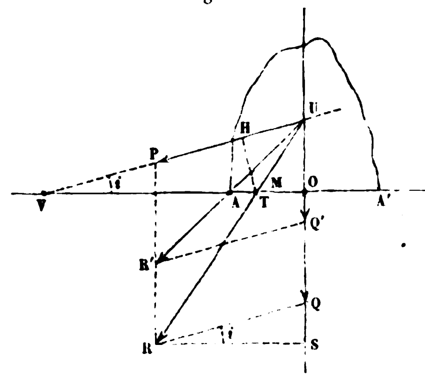
PAR M. E. CESARO.

.... Soit P la résultante des forces extérieures, qui agissent sur un massif de poids Q, reposant sur un plan horizontal. Considérons la section faite dans le massif par le plan PQ. Soient respectivement (*fig.* 1) O, V, T les points où le plan de base est rencontré par les forces Q, P et par leur résultante. Soit, enfin, A le ***pied extérieur*** du massif, autour duquel on suppose que celui-ci

tend à tourner, sous l'action de P. Posons

$$OA = x, \quad OV = \lambda x, \quad OT = \theta x.$$

Fig. 1.



On sait que le *coefficient de stabilité* s'exprime par

$$N = \frac{\text{moment de stabilité}}{\text{moment de renversement}} = \frac{Qx}{P(\lambda x - x)\sin i}$$
$$= \frac{1}{\lambda - 1}\,\frac{Q}{P\sin i}.$$

Or les triangles semblables UOT, USR donnent

$$\frac{Q + P\sin i}{P\cos i} = \frac{\lambda x \tang i}{\theta x},$$

d'où

$$\frac{Q}{P\sin i} = \frac{\lambda - \theta}{\theta}.$$

Conséquemment

$$(1) \qquad N = \frac{1}{\theta}\,\frac{\lambda - \theta}{\lambda - 1}.$$

.... La formule (1) peut être écrite ainsi

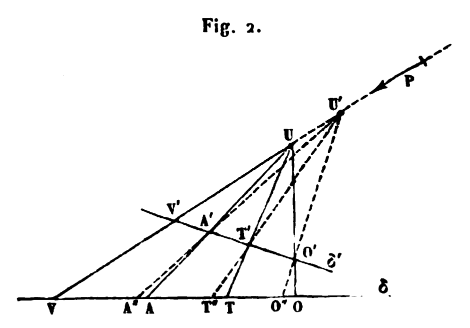
$$N = \frac{OA.VT}{OT.VA} = \frac{(OT + TA)(VA + AT)}{OT.VA} = 1 + \frac{OV.AT}{OT.AV}.$$

Il en résulte que *l'excès du coefficient de stabilité sur l'unité est égal au rapport anharmonique des points* O, T, A, V. Cette conclusion est très importante.

Elle est le point de départ d'une série de constructions, ayant pour but de rechercher graphiquement l'épaisseur à donner à la base d'un massif, et d'éviter ainsi l'emploi gênant d'une équation de second degré....

.... Toute ponctuelle de quatre éléments, telle que OTAV (*fig.* 2), représente donc un certain massif. Or on sait

Fig. 2.



que deux ponctuelles projectives ont même rapport anharmonique, et, réciproquement, deux ponctuelles à rapports anharmoniques égaux sont toujours projectives, c'est-à-dire que l'on peut les déduire l'une de l'autre par une série d'opérations projectives. Il en résulte que, si, d'un centre quelconque, tel que U, on projette, sur la droite δ', la ponctuelle OTAV; puis, du centre U', sur la droite δ, la ponctuelle obtenue O'T'A'V', en O''T''A''V, etc., toutes ces ponctuelles représentent des massifs différents, mais possédant tous le même degré de stabilité. Réciproquement, si l'on considère, sur le terrain, les ponctuelles représentatives d'une suite de massifs, offrant tous le même degré de stabilité, deux quelconques de ces ponctuelles sont projectives.

.... Aussitôt que mes occupations me le permettront, je vous montrerai comment on peut, d'une manière simple, utiliser les propriétés géométriques, dont je viens de

faire un rappel rapide, pour le tracé graphique des dimensions d'un massif. Le problème est un peu plus compliqué qu'on ne le croirait au premier abord, et, bien qu'il admette une solution générale, celle-ci ne se présente sous une forme susceptible d'application pratique, que si l'on a affaire à des massifs simples, tels que *murs droits,* à section verticale *rectangulaire, trapézoïdale,* etc. Quoi qu'il en soit, on peut toujours ramener le cas général à celui où le massif est soumis à un effort horizontal....

.... Dans la pratique, on fait varier N de 1.5 à 2. La valeur pratique maxima du coefficient de stabilité correspond à une particularité géométrique intéressante. En effet, on reconnait immédiatement que *la ponctuelle représentative d'un massif, dont le coefficient de stabilité est égal à* 2, *est une forme harmonique.* De cette propriété résultent, pour le cas de $N = 2$, de grandes simplifications dans les opérations graphiques. On peut observer que, si H est la projection de T sur UV, les angles OHT, AHT sont égaux. En outre, M étant le milieu de OA, on a

$$MT.MV = MA^2; \quad ....$$

.... La ponctuelle OTAV étant projetée, du centre U, sur la verticale PR, le rapport anharmonique se réduit au simple rapport $\frac{RR'}{PR'}$. On a donc $PR = N.PR'$. Réciproquement, si l'on démontrait directement la dernière égalité, on aurait, en projetant du centre U, une démonstration simple de tout ce qui précède. Or, écrire la condition d'équilibre stable, en prenant un coefficient de stabilité N, revient à écrire la condition d'*équilibre strict,* en ne comptant, pour la stabilité, que sur la $N^{ième}$ partie du poids du massif, c'est-à-dire en supposant que l'on ait affaire à un poids $Q' = \frac{Q}{N}$. Puisque,

dans cette hypothèse, l'équilibre serait *strict*, la résultante des forces P, Q' doit passer par A. On a donc bien

$$\frac{PR'}{PR} = \frac{UQ'}{UQ} = \frac{1}{N}.$$

.... A cause de $\theta < 1$, la formule (1) montre que $N > \frac{1}{\theta}$. Si l'on voulait s'astreindre à faire tomber le point d'application de la résultante totale à l'intérieur du *noyau central* de la base du massif, on devrait adopter, pour N, des valeurs trop élevées. Ainsi, dans le cas d'une section horizontale *rectangulaire*, on devrait prendre $N > 3$: l'application du principe du noyau central conduit donc à des conséquences trop rigoureuses. Aussi peut-on affirmer que, dans la pratique, ce principe est toujours violé. En effet, à cause de $N \gtreqless 2$, on a $\theta > \frac{1}{2}$. En prenant $\theta = \frac{1}{2}$, on est toujours assuré de la stabilité du massif; car la formule (1) devient

$$N = 2 + \frac{AO}{AV}.$$

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Géométrie descriptive pour l'Enseignement secondaire spécial, conforme au programme du 28 juillet 1882, par M. *Ernest Lebon*, agrégé de l'Université, professeur de Mathématiques au lycée Charlemagne. Ier volume (4e édition), 3e année, prix : 3^{fr}; IIe volume (2e édition), 4e et 5e année, prix : 4^{fr},50. Delalain, 56, rue des Écoles, Paris.

Cet Ouvrage, qui est un résumé du *Traité de Géométrie descriptive* pour l'Enseignement classique, par le même Auteur, convient aux candidats au baccalauréat ès sciences et à l'École navale.

SUR UNE GÉNÉRALISATION DES PROPRIÉTÉS RELATIVES AU CERCLE DE BROCARD ET AU POINT DE LEMOINE;

PAR M. ÉMILE LEMOINE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

---

§ I. — M. Brocard a étudié le premier les propriétés de deux points remarquables ω et ω' du plan d'un triangle et d'un cercle lié avec eux. Il définit ainsi (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* question 1166, tome XIV, 1875) ω et ω' : ω est le point tel que les angles ωAC, ωBA, ωCB soient égaux ; ω' est le point tel que les angles ω'AB, ω'BC, ω'CA soient égaux. La question a été développée par le même géomètre dans la *Nouvelle Correspondance,* tome III, 1877, aux *Congrès* d'Alger et de Rouen, 1881 et 1883, dans *Mathesis,* etc., et aussi par de nombreux travaux de géomètres étrangers. M. Brocard avait appelé d'abord ces points les *points segmentaires,* mais le nom de *points de Brocard* a justement prévalu.

En 1873 au Congrès de Lyon, et dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* p. 364, 1873, et en 1874 au Congrès de Lille, je me suis occupé d'un point remarquable que j'avais appelé *centre des médianes antiparallèles* et que je définissais ainsi : Le point où concourent les droites qui, partant des sommets d'un triangle, divisent en deux parties égales la partie de l'antiparallèle au côté opposé qui est comprise entre les deux autres côtés. Depuis ce temps, de très nombreux travaux ont paru sur le même sujet tant en France qu'en Angleterre, en Allemagne et en Belgique.

Il était curieux que, dans l'étude relative aux *points*

de Brocard, on rencontrât à chaque instant le *centre des médianes antiparallèles* et réciproquement ; ce qui suit mettra bien en lumière la raison de cette liaison intime.

Dans la généralisation que nous allons faire, nous ne pouvons conserver le nom de *centre des médianes antiparallèles* qui n'aurait plus aucun sens ; nous adopterons le nom de *point de Lemoine,* que MM. Neuberg, Brocard, de Longchamps, etc., nous font l'honneur d'employer.

1. Soient K un point du plan du triangle de référence ABC ; x, y, z les coordonnées homogènes de K ; soient α, β, γ les points où AK, BK, CK coupent BC, AC, AB. Je pars de α en suivant sur le périmètre du triangle le sens ABC et j'appelle μ' l'intersection du côté CA qui, dans le sens ABC, suit BC, avec la parallèle menée par α au troisième côté AB ; je fais la construction analogue, en marchant dans le même sens, pour les points β et γ ; j'obtiens ainsi ν' sur AB et λ' sur BC. Il est évident que les droites $A\lambda'$, $B\mu'$, $C\nu'$ se coupent en un même point ω'.

Les coordonnées de ω' sont

$$czx,\ axy,\ byz.$$

Je pars de α en suivant sur le périmètre du triangle le sens CBA et j'appelle ν l'intersection du côté BA qui, dans le sens CBA, suit CB, avec la parallèle menée par α au troisième côté AC ; je fais la construction analogue, en marchant toujours dans le sens CBA, pour les points γ et β, et j'obtiens ainsi μ sur AC et λ sur BC.

Il est évident que les droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ se coupent en un même point ω.

Les coordonnées de ω sont

$$byx,\ czy,\ axz.$$

Pour bien distinguer l'un de l'autre les points ω et ω' nous dirons que ω' est le point *direct* par rapport au point K et que ω est le point *rétrograde*.

Si nous prenons pour point K le point de Lemoine proprement dit, point qui a pour coordonnées

$$a, \; b, \; c,$$

les points ω et ω' sont les points de Brocard.

2. *Si l'on prend un point* K' à l'intérieur *d'un triangle* A'B'C', *on peut toujours supposer que* A'B'C' *est la projection d'un triangle* ABC, *tel que le point* K, *dont* K' *est la projection, soit le point de Lemoine* (centre des médianes antiparallèles) *de* ABC. En effet, si x', y', z' sont les coordonnées de K' (A'B'C' étant le triangle de référence), la conique

$$x'\beta\gamma + y'\alpha\gamma + z'\alpha\beta = 0$$

est une ellipse.

Or cette ellipse est telle que ses tangentes en A', B', C' forment un triangle homologique à A'B'C', K' étant le centre d'homologie.

Cette ellipse peut toujours être regardée comme la projection d'un cercle qui est alors le cercle circonscrit à ABC et où K est le point de Lemoine, d'après une propriété connue. Ce théorème fait voir que toutes les propriétés projectives des points de Brocard et de Lemoine s'appliquent au groupe général des trois points K, ω, ω', formé d'un point quelconque K, de son point direct ω' et de son point rétrograde ω, et réciproquement.

Si K' est extérieur au triangle A'B'C', il peut être regardé comme la projection d'un point K associé (*voir* la Note du § IV) du point de Lemoine dans le triangle

ABC et les propriétés respectives des points K, ω, ω' ne sont pas modifiées.

Nous allons donner dans ce qui suit les principales propriétés des points K, ω, ω' et les expressions très remarquables qui représentent les droites, les coniques, etc., liées au groupe K, ω, ω'; comme cas particulier, en prenant pour K le point de Lemoine, nous aurons ce qui se rapporte aux points de Brocard.

Dans tout le Mémoire, nous poserons, pour abréger,

$$a^2x^2 - yzbc = A, \quad b^2y^2 - zxca = B, \quad c^2z^2 - xy\,ab = C.$$

3. L'équation de $\omega\omega'$ est

$$\frac{A}{x}\alpha + \frac{B}{y}\beta + \frac{C}{z}\gamma = 0. \tag{1}$$

4. L'équation de la conique $\omega\omega'$ABC est

$$\frac{A}{a}\beta\gamma + \frac{B}{b}\alpha\gamma + \frac{C}{c}\alpha\beta = 0. \tag{2}$$

Lorsque K est le point dont les coordonnées sont

$$\frac{c^2b^2 - a^4}{a}, \quad \frac{a^2c^2 - b^4}{b}, \quad \frac{b^2a^2 - c^4}{c},$$

l'équation (2) représente le cercle circonscrit au triangle ABC.

Lorsque K est sur l'une des trois ellipses qui sont tangentes à deux côtés d'un triangle aux extrémités du troisième et qui passent par le centre de gravité, ellipses dont les équations sont

$$a^2\alpha^2 - bc\beta\gamma = 0, \quad \ldots,$$

sur

$$a^2\alpha^2 - bc\beta\gamma = 0$$

par exemple, la conique que représente l'équation (2) se décompose en deux droites dont l'une est le côté BC

du triangle, l'autre est la droite $A\omega$ ou $A\omega'$, car les trois points A, ω, ω' sont alors en ligne droite.

Lorsque K est sur la conique dont l'équation est

$$a\cos A(a^2\alpha^2 - bc\beta\gamma) + b\cos B(b^2\beta^2 - ca\gamma\alpha) + c\cos C(c^2\gamma^2 - ab\alpha\beta) = 0,$$

et qui passe aussi par le centre de gravité E de ABC, la conique représentée par l'équation (2) est une hyperbole équilatère.

Le centre de la conique représentée par l'équation (2) a pour coordonnées

$$\frac{A(B+C-A)}{a},\ \frac{B(A+C-B)}{b},\ \frac{C(A+B-C)}{c}.$$

§ II. — 1. Si A_1, B_1, C_1 sont les intersections respectivement de $B\omega'$ avec $C\omega$, de $C\omega'$ avec $A\omega$, de $A\omega'$ avec $B\omega$; si A'_1, B'_1, C'_1 sont les intersections respectivement de $C\omega'$ avec $B\omega$, de $A\omega'$ avec $C\omega$, de $B\omega'$ avec $A\omega$, on aura

Points.	Coordonnées des points.		
A_1	bcx,	c^2z,	b^2y,
B_1	c^2z,	cay,	a^2x,
C_1	b^2y,	a^2x,	abz,
A'_1	$bcyz$,	aby^2,	acz^2,
B'_1	abx^2,	$cazx$,	cbz^2,
C'_1	acx^2,	cby^2,	$abzy$.

2. Les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont homologiques et le centre D d'homologie a pour coordonnées

$$\frac{1}{a^2x},\ \frac{1}{b^2y},\ \frac{1}{c^2z};$$

l'axe d'homologie G a pour équation

$$aBC\alpha + bAC\beta + cAB\gamma = 0.$$

Les équations de B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 sont

$$aA\alpha + bC\beta + cA\gamma = 0, \quad \ldots.$$

Remarque. — Soit Π le point où CD' coupe AB,

$$\frac{\Pi A}{\Pi B} = \frac{ax}{by}.$$

3. Les triangles ABC, $A'_1B'_1C'_1$ sont homologiques et le centre D' d'homologie a pour coordonnées

$$ax^2, \quad by^2, \quad cz^2.$$

L'axe d'homologie est G; B_1C_1 et $B'_1C'_1$ se coupent donc sur BC.

Les équations de $B'_1C'_1$, $A'_1C'_1$, $A'_1B'_1$ sont

$$bcyzA\alpha + bax^2C\beta + acx^2B\gamma = 0, \quad \ldots.$$

Remarque. — Soit Π' le point où CD' coupe AB, on a

$$\frac{\Pi'A}{\Pi'B} = \frac{b^2y^2}{a^2x^2} = \frac{\overline{\Pi B}^2}{\overline{\Pi A}^2}.$$

4. Il résulte de ce qui précède que, si deux points (x, y, z), (x', y', z') ont entre leurs coordonnées la relation

$$a^3x^2x' = b^3y^2y' = c^3z^2z',$$

le point D' correspondant à x, y, z coïncidera avec le point D correspondant à x', y', z'.

Ainsi, par exemple, le point D' correspondant au point $a^{m-1}b^{m-1}c^{m-1}$ coïncidera avec le point D correspondant au point $\frac{1}{a^{2m+1}}\ \frac{1}{b^{2m+1}}\ \frac{1}{c^{2m+1}}$.

5. La conique $A_1B_1C_1\omega\omega'$ a pour équation

$$(3) \qquad ayz\alpha^2 + bxz\beta^2 + cxy\gamma^2 - ax^2\beta\gamma - by^2\alpha\gamma - cz^2\alpha\beta = 0,$$

elle passe par le point K

$$x, y, z,$$

et par le point O_k

$$x(by + cz - ax),\quad y(ax + cz - by),\quad z(by + ax - cz).$$

C'est la conique des sept points correspondant à K.

Si K est le point de Lemoine, elle devient le *cercle de Brocard* et elle n'est un cercle que dans ce seul cas.

Remarque. — L'équation (3) reste la même si l'on change α en x, β en y, γ en z et réciproquement; donc, si l'on prend un point quelconque Θ de la conique des sept points correspondant à un point K, la conique des sept points correspondant à Θ passera en K.

La conique des sept points est une hyperbole équilatère lorsque K est sur la droite

$$\alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos C = 0,$$

qui est l'axe d'homologie du triangle ABC et du triangle formé par les pieds des hauteurs.

C'est une parabole si K est sur l'ellipse maxima inscrite dans ABC.

Une ellipse si K est à l'intérieur de cette ellipse.

Une hyperbole si K est à l'extérieur de cette ellipse.

Une droite si K s'éloigne à l'infini, et cette droite enveloppe l'ellipse maxima inscrite dans le triangle.

6. La conique qui passe par les cinq points A'_1, B'_1, C'_1, ω, ω' a pour équation

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & abc(ayz\alpha^2 + bxz\beta^2 + cxy\gamma^2) - b^2c^2yz\beta\gamma \\ & \qquad - a^2c^2xz\alpha\gamma - a^2b^2xy\alpha\beta = 0, \end{aligned} \right.$$

elle passe aussi par le centre de gravité de ABC.

§ III. — On a facilement la démonstration des théorèmes suivants :

1. *Si par* D *on mène des parallèles aux trois côtés*

du triangle ABC, *les longueurs que deux de ces parallèles interceptent sur le troisième côté, respectivement sur* BC, AC, AB, *sont proportionnelles à* $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$.

2. *Si par* D′ *on mène des parallèles aux trois côtés du triangle* ABC, *les longueurs que deux de ces parallèles interceptent sur le troisième, respectivement sur* BC, AC, AB, *sont proportionnelles à* a^3x^2, b^3y^2, c^3z^2.

3. *En faisant les mêmes constructions pour* ω', *les longueurs interceptées sur* BC, AC, AB *sont proportionnelles à* $\frac{a}{by}$, $\frac{b}{cz}$, $\frac{c}{ax}$, *c'est-à-dire inversement proportionnelles aux coordonnées du point* F (voir § VIII).

4. *En faisant les mêmes constructions pour* ω, *les longueurs interceptées sur* BC, AC, AB *sont proportionnelles à* $\frac{a}{cz}$, $\frac{b}{ax}$, $\frac{c}{by}$, *c'est-à-dire inversement proportionnelles aux coordonnées du point* H (voir § VIII).

5. *Si par* ω *on mène des parallèles à* AC *et à* AB *qui interceptent sur* BC *une longueur* L; *si par* ω' *on mène des parallèles à* AC *et à* AB *qui interceptent sur* BC *une longueur* L′; *on aura*

$$\frac{L}{L'} = \frac{by}{cz},$$

et une série de relations analogues en considérant les antiparallèles aux côtés au lieu des parallèles, les longueurs interceptées sur les parallèles ou sur les antiparallèles par les côtés, etc.

6. *Par* ω *menons une parallèle à* AC *qui coupe* CB *en* $\mathcal{A}$ *et* AB *en* $\mathcal{C}_1$.

Par ω *menons une parallèle à* BA *qui coupe* AC *en* $\mathcal{B}$ *et* BC *en* $\mathcal{A}_1$.

Par ω *menons une parallèle à* CB *qui coupe* BA *en* $\mathcal{C}$ *et* CA *en* $\mathcal{B}_1$.

Par ω′ *menons une parallèle à* AB *qui coupe* BC *en* $\mathcal{A}'$ *et* CA *en* $\mathcal{B}'_1$.

Par ω′ *menons une parallèle à* BC *qui coupe* CA *en* $\mathcal{B}'$ *et* AB *en* $\mathcal{C}'_1$.

Par ω′ *menons une parallèle à* CA *qui coupe* AB *en* $\mathcal{C}'$ *et* BC *en* $\mathcal{A}'_1$.

On a les relations

$$y \times \omega'\mathcal{A}' = z \times \omega'\mathcal{B}' = x \times \omega'\mathcal{C}',$$
$$yab^2 \times \omega'\mathcal{A}'_1 = zbc^2 \times \omega'\mathcal{B}'_1 = xca^2 \times \omega'\mathcal{C}'_1,$$
$$zac^2 \times \omega'\mathcal{A} = xba^2 \times \omega\mathcal{B} = ycb^2 \times \omega\mathcal{C},$$
$$z \times \omega\mathcal{A}_1 = x \times \omega\mathcal{B}_1 = y \times \omega\mathcal{C}_1.$$

7. *Les droites* KA_1, KB_1, KC_1 *ont pour équations*

$$(by + cz)\alpha - bx\beta - cx\gamma = 0, \quad \ldots;$$

donc elles sont parallèles à BC, AC, AB *respectivement, et l'on peut dire que :*

Les parallèles menées par A_1, B_1, C_1 *respectivement à* BC, AC, AB *se coupent au point* K.

§ IV. — 1. Soient λ, μ, ν (*voir* § I) les points où les droites Aω, Bω, Cω coupent respectivement BC, AC, AB.

Soient λ′, μ′, ν′ les points où les droites Aω′, Bω′, Cω′ coupent respectivement BC, AC, AB.

On a

$$\frac{by}{ax} = \frac{\overline{\lambda C}}{\overline{\lambda B}}, \quad \frac{cz}{by} = \frac{\overline{\mu A}}{\overline{\mu C}}, \quad \frac{ax}{cz} = \frac{\overline{\nu B}}{\overline{\nu A}},$$
$$\frac{ax}{cz} = \frac{\overline{\lambda' C}}{\overline{\lambda' B}}, \quad \frac{by}{ax} = \frac{\overline{\mu' A}}{\overline{\mu' C}}, \quad \frac{cz}{by} = \frac{\overline{\nu' B}}{\overline{\nu' A}}.$$

2. On peut remarquer que les points λ, μ, ν divisent

les côtés BC, CA, AB dans le même rapport que les points ν', λ', μ' divisent les côtés AB, BC, CA, et l'on a

$$\frac{\overline{\lambda C}.\overline{\lambda' C}}{\overline{\lambda B}.\overline{\lambda' B}} = \frac{by}{cz}, \quad \frac{\overline{\mu A}.\overline{\mu' A}}{\overline{\mu C}.\overline{\mu' C}} = \frac{cz}{ax}, \quad \frac{\overline{\nu B}.\overline{\nu' B}}{\overline{\nu A}.\overline{\nu' A}} = \frac{ax}{by}.$$

Il est évident que les égalités pourraient être prises pour représenter les points ω et ω'; ils seraient alors définis par une permutation tournante des lettres a, b, c, etc., au moyen du rapport des segments que les droites joignant ces points à un sommet déterminent sur le côté opposé; si donc on transforme par points associés [1] une figure liée à ω, ω', la figure transformée aura par rapport aux points associés de ω et de ω' des propriétés tout à fait analogues à celles de la figure primitive par rapport à ω et ω'; seulement certains segments additifs seront devenus soustractifs ou réciproquement.

Ainsi, par exemple, si nous faisons la transformation associée $-x, y, z$, aux points ω', ω dont les coordonnées sont

$$xzc,\ yxa,\ zyb, \quad xyb,\ yzc,\ zxa$$

correspondent les points ω'_a, ω_a dont les coordonnées sont

$$-xzc,\ yxa,\ zyb, \quad -xyb,\ yzc,\ zxa,$$

---

[1] Voir *Congrès de Blois, Association française pour l'avancement des Sciences*. Communication de M. E. Lemoine sur les points associés du plan d'un triangle.

Il suffit, pour l'intelligence de ce que nous disons ici, de savoir :

1° Qu'à un point O dont les coordonnées sont α, β, γ correspondent les associés O_a, O_b, O_c dont les coordonnées sont respectivement

$$-\alpha, \beta, \gamma; \quad \alpha, -\beta, \gamma; \quad \alpha, \beta, -\gamma.$$

2° Que si $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ est l'équation d'une courbe M, sa transformée par points associés M_a sera

$$f(-\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \ldots.$$

qui donnent lieu à une conique passant par les sept associés de ω, ω', A_1, B_1, C_1, K, O_k.

$A\omega_a$, $A\omega'_a$ coupent BC respectivement en λ et en λ'.

$B\omega_a$, $B\omega'_a$ coupent CA respectivement aux conjugués harmoniques de μ et de μ' par rapport à A et à C.

$C\omega_a$, $C\omega'_a$ coupent AB respectivement aux conjugués harmoniques de ν et de ν' par rapport à B et à A.

A chaque point K correspondent donc quatre couples de points ω, ω'; quatre coniques, etc., qui jouissent de propriétés analogues.

3. On voit facilement que, comme pour tous les groupes de quatre droites associées, les quatre droites $\omega\omega'$, $\omega_a\omega'_a$, $\omega_b\omega'_b$, $\omega_c\omega'_c$ forment trois à trois quatre triangles inscrits dans ABC, c'est-à-dire que trois quelconques d'entre elles forment un triangle inscrit dans ABC et homologique avec lui; les quatre centres d'homologie de ces triangles et de ABC sont quatre points associés, celui de ABC et du triangle formé par $\omega_a\omega'_a$, $\omega_b\omega'_b$, $\omega_c\omega'_c$ a pour coordonnées

$$\frac{x}{A}, \frac{y}{B}, \frac{z}{C}, \ldots.$$

4. Les droites $\mu\lambda'$ et $\lambda\mu'$ sont tangentes à la parabole qui touche CA en A et CB en B. Cette parabole a pour équation

$$c^2\gamma^2 - 4ab\alpha\beta = 0.$$

§ V. — 1. Les triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $\omega\omega'D$ ont même centre de gravité E.

2. Si S est le milieu de $\omega\omega'$, les trois points D, E, S sont en ligne droite et l'on a

$$DE = 2\,ES.$$

Le milieu de BC, le milieu de B_1C_1 et le point S sont

en ligne droite, les coordonnées de S sont

$$x(by+cz),\quad y(cz+ax),\quad z(ax+by).$$

3. Les droites AK, BK, CK coupent la conique (3) des sept points respectivement en A_2, B_2, C_2.

A_2 a pour coordonnées

$$\frac{1}{ayz},\ \frac{1}{z(by+cz-ax)},\ \frac{1}{y(by+cz-ax)}.$$

De même B_2, C_2, etc.

4. A_1A_2 a pour équation

$$a\alpha(zc-by)+b\beta(by-ax)+c\gamma(ax-cz)=0.$$

De même B_1B_2, C_1C_2, etc.

Ces trois droites passent par le centre de gravité E de ABC qui est ainsi le centre d'homologie des deux triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$.

L'axe d'homologie G_2 de ces deux triangles est la polaire de E par rapport à la conique des sept points; G_2 a pour équation

$$a\alpha(by-cz)^2+b\beta(cz-ax)^2+c\gamma(ax-by)^2=0.$$

DO_k a pour équation

$$a^2\alpha x(cz-by)(B+C)+b^2\beta y(ax-cz)(C+A)$$
$$+c^2\gamma z(by-ax)(A+B)=0.$$

5. Le milieu de B_1C_1, le sommet A et le point S' qui a pour coordonnées

$$\frac{1}{a(by+cz)},\ \frac{1}{b(cz+ax)},\ \frac{1}{c(ax+by)}$$

sont en ligne droite.

6. D' est le pôle de $\omega\omega'$ par rapport à la conique (3) des sept points.

7. Soient M, N, P les milieux de BC, AC, AB.

MC_2 a pour équation

$$\alpha(ax - cz) + \beta bx - \gamma cx = 0;$$

la parallèle à MC_2 menée par B a pour équation

$$\alpha z + 2\gamma x = 0;$$

CC_2 a pour équation

$$\alpha y - \beta z = 0.$$

Donc CC_2 passe en K.

8. Soit J_c le point ayant pour coordonnées

$$x, y, -\tfrac{1}{2}z;$$

J_c est l'intersection avec CC_2 de la parallèle à MC_2 menée par B. On voit que J_c, K, C sont en ligne droite et que C_2 est le milieu de CJ_c.

L'équation de la parallèle à AB menée par J_c est

$$a\alpha z + b\beta z + 2\gamma(ax + by) = 0.$$

Cette droite coupe CP au point I_c

$$\frac{1}{az}, \frac{1}{bz}, -\frac{1}{ax + by},$$

donc CI_c passe en E.

L'équation de la conique qui passe par les cinq points A, B, C, I_c, J_c est

$$(5) \qquad x\beta\gamma + y\alpha\gamma + z\alpha\beta = 0;$$

son centre est O_k.

Cette conique passe évidemment aussi par les points

I_a, I_b, J_a, J_b dont les coordonnées sont respectivement

$$-\frac{1}{by+cz}, \frac{1}{bx}, \frac{1}{cx},$$
$$\frac{1}{ay}, -\frac{1}{ax+cz}, \frac{1}{cy},$$
$$-\tfrac{1}{2}x, y, z,$$
$$x, -\tfrac{1}{2}y, z.$$

On a donc, pour chaque point $K(x, y, z)$, la notion d'une conique circonscrite à ABC et qui passe par six autres points bien déterminés.

9. NC_2 et AJ_c sont parallèles, ainsi que C_2M et BJ_c.

10. C_1, P, O_k; B_1, N, O_k; A_1, M, O_k forment trois groupes de trois points en ligne droite.

11. PJ_c a pour équation

$$az\alpha - bz\beta + 2\gamma(ax - by) = 0.$$

12. Les droites O_kD et G ont des directions conjuguées par rapport à la conique (5).

§ VI. — 1. Le centre Z de la conique des sept points a pour coordonnées

$$(A + \Delta)x, \quad (B + \Delta)y, \quad (C + \Delta)z,$$

en posant

$$bcyz + ca\,zx + ab\,xy = \Delta.$$

2. La droite KO_k a pour équation

$$\alpha yz(cz - by) + \beta xz(ax - cz) + \gamma xy(by - ax) = 0;$$

elle est vérifiée par les coordonnées de Z, donc :

K, Z, O_k sont en ligne droite et par suite K et O_k sont les deux extrémités d'un diamètre de la conique des sept points.

3. Comme A_2, B_2, C_2 sont sur cette conique et sont les milieux des cordes AJ_a, BJ_b, CJ_c menées par K (*voir* § V, n° 8) de la conique $ABCJ_aJ_b$[que nous nommerons *conique circonscrite des six points* et qui est représentée par l'équation (5)], on voit que cette conique et la conique des sept points sont homothétiques.

La conique (5) jouit, par rapport à la conique des sept points, des mêmes propriétés que le cercle circonscrit au triangle ABC par rapport au cercle de Brocard.

4. La polaire de C, par rapport à la conique des sept points, a pour équation

$$\alpha b y^2 + \beta a x^2 - 2xyc\gamma = 0.$$

Le pôle de AB a pour coordonnées

$$\frac{1}{x(acxz+2b^2y^2)},\quad \frac{1}{y(cbzy+2a^2x^2)},\quad \frac{1}{z(4abxy+c^2z^2)}.$$

5. Le triangle ABC et le triangle formé par les polaires de ses côtés ont, pour centre d'homologie, le point

$$\frac{x}{cbzy+2a^2x^2},\quad \frac{y}{acxz+2b^2y^2},\quad \frac{z}{bayx+2c^2z^2}.$$

6. Si l'on mène les tangentes en ABC à la conique circonscrite des six points (5), ces trois tangentes forment un triangle homologique avec ABC ayant K pour centre d'homologie, l'axe d'homologie est la droite

$$\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}=0.$$

7. Le produit des trois perpendiculaires abaissées de ω sur les trois côtés de ABC est égal au produit des trois perpendiculaires abaissées de ω' sur les mêmes côtés; ce produit a pour valeur

$$\frac{8S^3abcx^2y^2z^2}{\Delta^3}.$$

8. La droite EZ a pour équation

$$a\alpha(cz-by)(B+C)+b\beta(ax-cz)(C+A)$$
$$+c\gamma(by-ax)(A+B)=0.$$

Le point d'intersection de EZ et de DO_k est sur la conique *circonscrite des six points* et a pour coordonnées

$$\frac{1}{a(B+C)},\quad \frac{1}{b(C+A)},\quad \frac{1}{c(A+B)}.$$

9. Remarquons que les points que nous avons considérés peuvent se grouper deux à deux, en points se correspondant de telle façon que les produits $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ de leurs coordonnées de même nom soient proportionnels respectivement à $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ (¹); par exemple ω et ω', E et K, D et D', S et S', etc., sont ainsi correspondants.

Le correspondant O'_k de O_k a pour coordonnées

$$\frac{1}{a(by+cz-ax)},\quad \frac{1}{b(ax+cz-by)},\quad \frac{1}{c(ax+by-cz)}.$$

Le correspondant Z' de Z a pour coordonnées

$$\frac{1}{a(A+\Delta)},\quad \frac{1}{b(B+\Delta)},\quad \frac{1}{c(C+\Delta)}.$$

(¹) Étant donné un point quelconque dont les coordonnées sont

$$f_1(x,y,z),\quad f_2(x,y,z),\quad f_3(x,y,z),$$

on peut déterminer un transformé de ce point par la condition que ce transformé aura pour coordonnées

$$\frac{x}{af_1},\quad \frac{y}{bf_2},\quad \frac{z}{cf_3}.$$

Lorsque le point dont les coordonnées sont x, y, z est le point de Lemoine, x, y, z sont proportionnels à a, b, c et l'on tombe sur la transformation *inverse* du capitaine Mathieu (*Nouvelles Annales*, p. 393, 1865).

La transformation plus générale que nous indiquons ici donne des résultats tout à fait analogues à ceux que trouve le capitaine Mathieu dans son remarquable Mémoire.

10. On verrait facilement avec tout ce qui précède que

$$Z, D', K, O_k;\ E, S', D';\ O'_k, Z', S;\ O_k, S', Z';$$
$$K, S', D;\ Z, S', O'_k;\ \ldots,$$

sont en ligne droite.

§ VII. — Les six points λ, μ, ν, λ', μ', ν' définis (§ I) ont respectivement pour coordonnées

$$o,\ cy,\ ax;\quad by,\ o,\ az;\quad bx,\ cz,\ o;\quad o,\ ax,\ by;$$
$$cx,\ o,\ by;\quad cz,\ ay,\ o;$$

ils sont sur une conique dont l'équation est

$$\begin{aligned} abc(ayz\alpha^2 + bxz\beta^2 + cxy\gamma^2) - cb\gamma\beta(a^2x^2 + bcyz) \\ - ac\alpha\gamma(b^2y^2 + acxz) - ba\beta\gamma(c^2z^2 + abyz) = o. \end{aligned}$$

J'ai cherché pour quels points K cette conique était un cercle; la recherche parait assez compliquée, mais il est facile de voir que ces points en nombre fini sont sur l'hyperbole

$$a^2\alpha^2(c^2 - b^2) + b^2\beta^2(a^2 - c^2) + c^2\gamma^2(b^2 - a^2) = o,$$

dont le centre est

$$\frac{1}{a(c^2 - b^2)},\quad \frac{1}{b(a^2 - c^2)},\quad \frac{1}{c(b^2 - a^2)}.$$

Cette hyperbole, qui est à elle-même son associée (*voir* § IV), passe par le centre de gravité et par les centres des cercles inscrits et exinscrits; par projection, on a donc le théorème suivant :

Les quatre centres de chaque groupe de quatre coniques homothétiques entre elles et inscrites à un triangle, le centre de gravité et les symétriques de chaque sommet par rapport au milieu du côté opposé (associés du centre de gravité) *sont huit points appartenant à une même hyperbole.*

§ VIII. — 1. Si l'on part de K et que l'on cherche le point direct et le point rétrograde de K, on trouve ω' et ω (§ I); si, partant de chacun de ceux-ci, on cherche le point direct et le point rétrograde de ω', puis le point direct et le point rétrograde de ω, et ainsi de suite pour chacun des nouveaux points obtenus, il semble que l'on doit engendrer une série indéfinie de points : il n'en est rien.

Le Tableau suivant, où les cases en *italique* désignent les points déjà obtenus,

K x, y, z	ω' point direct de K $czx,\ axy,\ byz.$	H point direct de ω' $\frac{cz}{a}, \frac{ax}{b}, \frac{by}{c}.$	D point direct de H $\frac{1}{a^2x}, \frac{1}{b^2y}, \frac{1}{c^2z}.$	F *point direct de* D.
				H *point rétrograde de* D.
			ω' *point rétrograde de* H.	
		K *point rétrograde de* ω'.		
	ω point rétrograde de K $byx,\ czy,\ axy.$	K *point direct de* ω.		
		F point rétrograde de ω $\frac{by}{a}, \frac{cz}{b}, \frac{ax}{c}.$	ω *point direct de* F.	
			D *point rétrograde de* F.	

démontre ce remarquable théorème :

Si l'on part d'un point K *et que l'on cherche le point direct et le point rétrograde de* K, *puis le point direct et le point rétrograde de chacun de ces nouveaux points, et ainsi de suite, on obtient six points différents seulement, savoir :*

1° K ; 2° ω′ *point direct de* K ; 3° H *point direct de* ω′ ; 4° ω *point rétrograde de* K ; 5° F *point rétrograde de* ω ; 6° D *point direct de* H.

Les coordonnées de D dans le Tableau précédent nous montrent que ce point (*voir* § II) est le centre d'homologie des deux triangles ABC, $A_1 B_1 C_1$.

K et D ; ω′ et F ; ω et H sont conjugués isotomiques ([1]).

2. Si deux points

$$\omega;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \quad \text{et} \quad \omega';\ \alpha',\ \beta',\ \gamma'$$

sont tels que l'on ait

$$\frac{a\alpha'}{c\gamma} = \frac{b\beta'}{a\alpha} = \frac{c\gamma'}{b\beta},$$

ω′ et ω sont respectivement le point direct et le point rétrograde d'un point ayant pour coordonnées

$$\frac{b}{\gamma},\ \frac{c}{\alpha},\ \frac{a}{\beta},$$

([1]) M. Neuberg (voir *Mémoire sur le tétraèdre*, p. 10) appelle *conjugués isotomiques* deux points tels que, si on les joint à un même sommet d'un triangle, les droites ainsi obtenues coupent le côté opposé en deux points symétriques par rapport au milieu de ce côté. *Voir* aussi de Longchamps (*Annales de l'École Normale*, année 1867), qui le premier a étudié ces points et les droites *réciproques* qui s'en déduisent ; *voir* aussi même auteur : *Congrès du Havre, de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, 1877.

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{c}{\beta'}, \frac{a}{\gamma'}, \frac{b}{\alpha'}.$$

§ IX. — Nous ne voulons pas allonger indéfiniment cette étude, dans laquelle nous avons généralisé les travaux de M. Brocard [*Congrès d'Alger* (1881) *et de Rouen* (1883) *de l'Association française pour l'avancement des Sciences*], en employant les mêmes notations que lui. Cependant, pour éviter des confusions possibles avec des points dont la désignation est généralement adoptée, comme O pour le centre du cercle circonscrit à un triangle, etc., nous avons remplacé les lettres O et O′ de M. Brocard par ω et ω', ainsi que M. Neuberg l'avait déjà fait, et les lettres H, H′ par O_k, O'_k; nous dirons cependant encore quelques mots de la généralisation des résultats si intéressants obtenus par M. Brocard (*Journal de Mathématiques spéciales,* p. 197; 1884).

Ainsi il y a une hyperbole circonscrite à ABC qui passe par les points O'_k, E, D, Z′, S′; son équation est

$$\frac{cz - by}{a\alpha} + \frac{ax - cz}{b\beta} + \frac{by - ax}{c\gamma} = 0;$$

son centre W a pour coordonnées

$$\frac{(cz - by)^2}{a}, \frac{(ax - cz)^2}{b}, \frac{(by - ax)^2}{c},$$

et il est sur la conique passant par les milieux des trois côtés du triangle et homothétique à la conique *circonscrite des six points* (§ VI, n° 3).

L'équation de cette conique, qui, par rapport à la conique circonscrite des six points, joue le même rôle que le cercle des neuf points par rapport au cercle circonscrit, est

$$a^2\alpha^2(cz + by - ax) + b^2\beta^2(ax + cz - by) + c^2\gamma^2(ax + by - cz) - 2abc(x\beta\gamma + y\alpha\gamma + z\alpha\beta) = 0.$$

Nous nous arrêterons un instant sur les points K qui ont pour coordonnées a^m, b^m, c^m; ils donnent lieu, en faisant varier m de $+\infty$ à $-\infty$, à toute une série de points remarquables pour les diverses valeurs qu'ont alors D, D′, O_k, ...; on retrouvera ainsi les résultats isolés obtenus dans l'étude de ces points (*voir* Brocard, *Congrès d'Alger,* p. 150; 1881; Lemoine, *Congrès de la Rochelle,* p. 122 et suiv.; 1882).

Le cas de $m = 1$ est le plus remarquable; le point K est alors le point de Lemoine, les points ω et ω' sont les points de Brocard; c'est le cas étudié en détail par ce géomètre dans les Mémoires déjà cités.

Le cas de $m = 0$ mérite aussi une mention particulière; K est alors le centre du cercle inscrit et les points ω et ω' sont les points importants que M. Jérabek a étudiés (voir *Mathesis*, p. 192, 1re année) et qu'il nomme respectivement I_1 et I_2 (*voir* aussi notre Mémoire sur les points associés, *Congrès de Blois,* 1884).

Dans ce cas, les coordonnées de ω et de ω' (I_1 et I_2 de M. Jérabek) sont respectivement

$$b, c, a; \quad c, a, b.$$

Le point O_k est le point dont les coordonnées sont

$$p-a, \quad p-b, \quad p-c:$$

c'est le point de Lemoine du triangle formé par les centres des trois cercles exinscrits (voir *Congrès de Rouen,* p. 123).

Dans le cas de $m = -1$ presque tous les points étudiés viennent se confondre au centre de gravité de ABC.

§ X. — Pour terminer nous dirons que tous les résultats précédents peuvent se généraliser encore par voie de perspective et qu'il serait facile de trouver, soit géométriquement, soit par le calcul, les mêmes séries de points

en ligne droite, de droites concourantes, etc., que nous avons rencontrées; nous ajoutons ainsi quelque chose aux intéressantes recherches de M. Brocard et à la Communication de M. G. Tarry (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 3 avril 1882). Pour donner un exemple de cette généralisation par voie de perspective, nous nous contenterons de parler de la conique des sept points.

Soit un triangle ABC; soit une droite $A_a B_b C_c$ qui coupe BC en A_a, CA en B_b, AB en C_c.

Soient K un point quelconque du plan; α, β, γ les points où AK, BK, CK coupent respectivement BC, CA, AB.

Je pars de α en suivant le périmètre de ABC dans le sens ACB et j'appelle ν, λ, μ respectivement les intersections de AB avec αB_b, de BC avec βC_c, de AC avec γA_a.

Je pars de α en suivant sur le périmètre de ABC le sens CAB et j'appelle μ', ν', λ' respectivement les intersections de CA avec αC_c, de AB avec βA_a, de BC avec γB_b :

1° Les six points λ, μ, ν, λ', μ', ν' appartiendront à une même conique.

2° Les trois droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ se coupent en un point ω que j'appelle point rétrograde par rapport à K.

Les trois droites $A\lambda'$, $B\mu'$, $C\nu'$ se coupent en un point ω' que j'appelle point direct par rapport à K; à chaque point K correspond une infinité de groupes binaires de points ω et ω', et un groupe à chaque position de $A_a B_b C_c$; d'où l'on déduit une méthode de transformation des figures, intéressante à étudier.

3° Soient A_1, B_1, C_1 les intersections respectivement de $B\omega'$ avec $C\omega$, de $C\omega'$ avec $A\omega$, de $A\omega'$ avec $B\omega$: soient A'_a, B'_b, C'_c les conjugués harmoniques de A_a par rapport à BC, de B_b par rapport à CA, de C_c par rapport à

AB; les trois droites $A_1 A'_a$, $B_1 B'_b$, $C_1 C'_c$ se coupent en un point O_k.

4° Les sept points ω, ω', A_1, B_1, C_1, K, O_k appartiennent à une même conique.

SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES DONT L'ÉQUATION EST DONNÉE EN COORDONNÉES POLAIRES

[SUITE (1)];

PAR M. CH. BIEHLER.

II.

THÉORIE DES ASYMPTOTES.

1. Nous supposerons, comme précédemment, que l'équation de la courbe soit donnée sous la forme

$$(1)\quad \rho^m \varphi_m(\omega) + \rho^{m-1}\varphi_{m-1}(\omega) + \ldots + \rho\varphi_1(\omega) + \varphi(\omega) = 0.$$

Soit α une racine simple de l'équation $\varphi_m(\omega) = 0$, c'est-à-dire soit $\varphi_m(\alpha) = 0$ et $\varphi'_m(\alpha) \gtrless 0$.

Nous supposerons, pour commencer, que $\varphi_{m-1}(\alpha)$ soit aussi différent de zéro.

Lorsque ω s'approche de α, une seule racine de l'équation (1) augmente indéfiniment; toutes les autres tendent vers des limites finies; il est aisé de trouver le signe de cette racine.

On a, en effet, en désignant par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ les m racines de l'équation en ρ,

$$(2)\qquad \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_m = -\frac{\varphi_{m-1}(\omega)}{\varphi_m(\omega)};$$

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. IV, p. 153.

et l'on voit que le signe de la racine qui augmente indéfiniment est donné par le signe du second membre, lorsque ω est suffisamment voisin de α.

Nous poserons $\omega = \alpha + \varepsilon$, comme nous l'avons déjà fait, et nous ferons tendre ε vers zéro.

La quantité $-\frac{\varphi_{m-1}(\omega)}{\varphi_m(\omega)}$ prend alors la forme

$$-\frac{\varphi_{m-1}(\omega)}{\varphi_m(\omega)} = -\frac{[\varphi_{m-1}(\alpha) + \varepsilon\varphi'_{m-1}(\alpha) + \ldots]}{\varepsilon\varphi'_m(\alpha) + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''_m(\alpha) + \ldots},$$

et, par suite, elle a le signe de

$$-\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varepsilon\varphi'_m(\alpha)}.$$

Or l'asymptote correspondant à cette racine, nécessairement réelle, qui augmente indéfiniment, a pour équation, comme l'on sait,

$$\rho\sin(\omega - \alpha) = l,$$

l étant la limite de $\rho\sin(\omega - \alpha)$ tirée de l'équation de la courbe, lorsque ω tend vers α.

Cette limite nous est fournie immédiatement par l'équation (2). Si ρ_1 est la racine qui augmente indéfiniment, et S_1 la somme de toutes les autres racines, l'équation (2) prend la forme

$$\rho_1 + S_1 = -\frac{\varphi_{m-1}(\alpha) + \varepsilon\varphi'_{m-1}(\alpha) + \ldots}{\varepsilon\varphi'_m(\alpha) + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''_m(\alpha) + \ldots}$$

et, par suite,

$$\rho_1\sin\varepsilon + S_1\sin\varepsilon = -\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\,\frac{[\varphi_{m-1}(\alpha) + \ldots]}{\varphi'_m(\alpha)};$$

on en déduit

$$\lim \text{ de } \rho_1\sin\varepsilon = -\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi'_m(\alpha)}.$$

L'équation de l'asymptote est donc

$$\rho \sin(\omega - \alpha) = -\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi'_m(\alpha)}.$$

2. Pour savoir de quel côté de l'asymptote se trouve la courbe, il faut connaître le signe de la différence

$$\lambda = \rho_1 \sin \varepsilon - l,$$

pour les valeurs de ε voisines de zéro. Cette différence a pour expression

$$\lambda = -\sin \varepsilon \frac{\varphi_{m-1}(\omega)}{\varphi_m(\omega)} + \frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi'_m(\alpha)} - S_1 \sin \varepsilon$$

ou bien

$$\lambda = -\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \frac{\varphi_{m-1}(\alpha) + \varepsilon \varphi'_{m-1}(\alpha) + \dots}{\varphi'_m(\alpha) + \frac{\varepsilon}{1.2} \varphi''_m(\alpha) + \dots} + \frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi'_m(\alpha)} - S_1 \sin \varepsilon;$$

si l'on observe que $\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}$ est de la forme

$$1 - \frac{\varepsilon^2}{1.2.3} + \frac{\varepsilon^4 \times \theta}{1.2.3.4.5},$$

θ étant < 1, on voit que λ a le signe de

$$\left[\frac{\frac{1}{1.2}\varphi''_m(\alpha)\varphi_{m-1}(\alpha) - \varphi'_m(\alpha)\varphi'_{m-1}(\alpha)}{\varphi'^2_m(\alpha)} - S_1\right]\varepsilon.$$

Or S_1, étant la somme des racines $\rho_2 + \rho_3 + \dots + \rho_m$, est une quantité aussi voisine qu'on veut de $-\frac{\varphi_{m-2}(\alpha)}{\varphi_{m-1}(\alpha)}$ qui représente la somme des racines de l'équation

$$\rho^{m-1}\varphi_{m-1}(\omega) + \rho^{m-2}\varphi_{m-2}(\omega) + \dots + \varphi(\omega) = 0$$

pour $\omega = \alpha$.

On voit donc, en définitive, que λ a le signe de

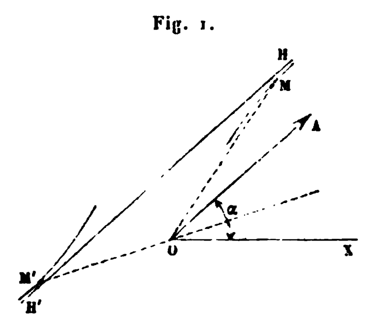
$$\left[\frac{\frac{1}{1.2}\varphi''_m(\alpha)\varphi_{m-1}(\alpha) - \varphi'_m(\alpha)\varphi'_{m-1}(\alpha)}{\varphi'^2_m(\alpha)} + \frac{\varphi_{m-2}(\alpha)}{\varphi_{m-1}(\alpha)}\right]\varepsilon.$$

Soient OA le rayon polaire mené dans la direction α, HH′ l'asymptote; λ représente la distance du point M situé sur le rayon vecteur $\alpha + \varepsilon$, à la droite HH′.

Si λ est négatif, le point M est au-dessous de HH′; si λ est positif, le point M est au-dessus de cette droite.

Le rayon OM est mené dans la direction $\alpha + \varepsilon$, ε étant positif; et OM′, dans la direction $\alpha + \varepsilon$, ε étant supposé négatif. On voit que, quand ε change de signe, ρ_1 change

Fig. 1.



de signe, ainsi que λ. On obtient une disposition des branches de la courbe autour de l'asymptote analogue à celle de la *fig.* 1; cette figure a été construite dans l'hypothèse où le coefficient de ε dans λ est négatif.

3. Supposons actuellement que le coefficient de ε dans λ soit nul; dans ce cas, λ sera de la forme

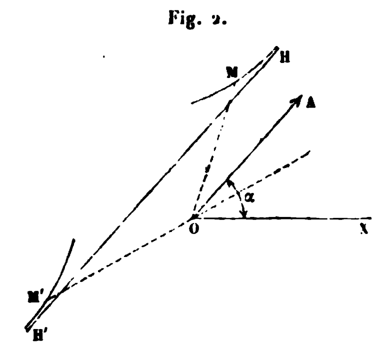
$$\lambda = \lambda_0 \varepsilon^2 + \lambda' \varepsilon^3,$$

λ_0 étant une quantité indépendante de ε et λ' une fonction de ε.

On voit que, pour des valeurs suffisamment petites de ε, λ a constamment le signe de λ_0, quel que soit le signe de ε; par suite, la courbe se trouve tout entière d'un côté de l'asymptote, et le point correspondant à l'infini est un point d'inflexion (*fig.* 2).

La figure a été construite dans l'hypothèse de $\lambda_0 > 0$.

Fig. 2.



Le point d'inflexion est donc caractérisé par la propriété suivante :

$$\frac{\frac{1}{2}\varphi''_m(\alpha)\,\varphi_{m-1}(\alpha) - \varphi'_m(\alpha)\,\varphi'_{m-1}(\alpha)}{\varphi'^2_m(\alpha)} + \frac{\varphi_{m-2}(\alpha)}{\varphi_{m-1}(\alpha)} = 0.$$

4. Supposons actuellement

$$\varphi_m(\alpha) = 0, \quad \varphi_{m-1}(\alpha) = 0.$$

Dans ce cas, deux racines de l'équation en ρ augmentent indéfiniment; soient ρ_1 et ρ_2 ces deux racines, nous avons les formules

$$(a) \qquad \rho_1 + \rho_2 = A + A'\varepsilon,$$

$$(b) \qquad \rho_1\rho_2 = \frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon},$$

A et B étant des quantités indépendantes de ε, dont il est aisé de trouver les valeurs; A' et B' étant des fonctions de ε qu'il est inutile de déterminer, mais dont on trouverait aussi facilement les expressions. Des formules (a) et (b), on tire

$$(c) \qquad (\rho_1 - \rho_2)^2 = (A + A'\varepsilon)^2 - 4\left(\frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

Le second membre a le signe de $-\frac{4B}{\varepsilon}$, et, par suite, ρ_1 et ρ_2 ne peuvent être réels que si

$$-\frac{4B}{\varepsilon} > 0,$$

c'est-à-dire si ε est de signe contraire à B.

Les formules (a) et (b) nous montrent que la somme

$$\rho_1 \sin\varepsilon + \rho_2 \sin\varepsilon$$

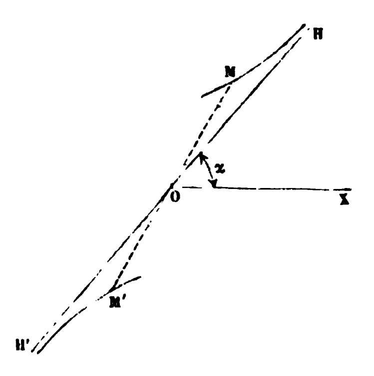
et le produit

$$\rho_1 \sin\varepsilon \times \rho_2 \sin\varepsilon$$

des quantités $\rho_1 \sin\varepsilon$, $\rho_2 \sin\varepsilon$ ont pour limites zéro; chacune de ces quantités a donc pour limite zéro. L'asymptote correspondant aux branches de courbe engendrées par ρ_1 et ρ_2 est donc confondue avec le rayon polaire mené dans la direction α.

Le signe de B nous donne la disposition de la courbe

Fig. 3.



autour de son asymptote. La construction de la *fig.* 3 suppose B négatif.

La valeur de B est $\frac{\varphi_{m-2}(\alpha)}{\varphi'_m(\alpha)}$, quantité différente de zéro et parfaitement déterminée dans l'hypothèse où nous nous sommes placés.

5. Nous n'examinerons pas en ce moment le cas où l'on aurait simplement

$$\varphi_m(\alpha) = 0, \quad \varphi'_m(\alpha) = 0,$$

c'est-à-dire où l'équation $\varphi_m(\omega) = 0$ aurait une racine double; mais nous y ajouterons la condition

$$\varphi_{m-1}(\alpha) = 0,$$

nous réservant de discuter le cas précédent quand il s'agira de la construction des branches paraboliques.

Nous aurons, dans ce cas, des formules de la forme

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{A + A'\varepsilon}{\varepsilon},$$
$$\rho_1\rho_2 = \frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon^2}$$

pour exprimer les deux racines qui augmentent indéfiniment. Les quantités A, B et le terme indépendant de ε dans A' et B' sont aisés à calculer.

Ces formules nous donnent

$$\rho_1 \sin\varepsilon + \rho_2 \sin\varepsilon = \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}(A + A'\varepsilon),$$
$$\rho_1 \sin\varepsilon \times \rho_2 \sin\varepsilon = \frac{\sin^2\varepsilon}{\varepsilon^2}(B + B'\varepsilon).$$

Lorsque ε tend vers zéro, les quantités $\rho_1 \sin\varepsilon$, $\rho_2 \sin\varepsilon$ tendent vers des limites l_1, l_2, telles que l'on ait

$$l_1 + l_2 = A,$$
$$l_1 l_2 = B;$$

l_1 et l_2 sont donc les racines de l'équation du second degré

$$l^2 - Al + B = 0.$$

On voit aisément que

$$A = -\frac{\varphi'_{m-1}(\alpha)}{\frac{1}{2}\varphi''_m(\alpha)}, \quad B = \frac{\varphi_{m-2}(\alpha)}{\frac{1}{2}\varphi''_m(\alpha)},$$

de telle sorte que l'équation du second degré qui a pour racines l_1 et l_2 est la suivante :

$$\tfrac{1}{2}\varphi''_m(\alpha)l^2 + \varphi'_{m-1}(\alpha)l + \varphi_{m-2}(\alpha) = 0.$$

Il nous faut maintenant chercher la disposition de la courbe autour des deux asymptotes parallèles

$$\rho\sin(\omega - \alpha) = l_1,\quad \rho\sin(\omega - \alpha) = l_2.$$

Désignons par λ_1 et λ_2 les fonctions $\rho_1 \sin\varepsilon$, $\rho_2 \sin\varepsilon$; on aura

$$(a')\qquad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}(A + A'\varepsilon),$$

$$(b')\qquad \lambda_1\lambda_2 = \frac{\sin^2\varepsilon}{\varepsilon^2}(B + B'\varepsilon);$$

il faut calculer les différences

$$\lambda_1 - l_1,\quad \lambda_2 - l_2.$$

Soient $\lambda' = \lambda_1 - l_1$, $\lambda'' = \lambda_2 - l_2$; on aura

$$\lambda' + \lambda'' = \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}(A + A'\varepsilon) - A :$$

d'autre part, les égalités (a) et (b) nous donnent

$$(c')\qquad (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \frac{\sin^2\varepsilon}{\varepsilon^2}[(A + A'\varepsilon)^2 - 4(B + B'\varepsilon)],$$

et, comme on a

$$(l_1 - l_2)^2 = A^2 - 4B,$$

il viendra

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - (l_1 - l_2)^2$$
$$= (A^2 - 4B)\left(\frac{\sin^2\varepsilon}{\varepsilon^2} - 1\right) + \frac{\sin^2\varepsilon}{\varepsilon^2}(2AA' - 4B' + A'^2\varepsilon).$$

Si l'on pose

$$2AA' - 4B' = 2C + C'\varepsilon,$$

C étant indépendant de ε, l'égalité précédente prendra la forme

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - (l_1 - l_2)^2 = 2C\varepsilon + C''\varepsilon^2,$$

car

$$\frac{\sin^2\varepsilon}{\varepsilon^2} = 1 - \theta\varepsilon^2, \quad \theta < 1;$$

par suite,

$$(\lambda' - \lambda'')(\lambda_1 - \lambda_2 + l_1 - l_2) = 2C\varepsilon + C''\varepsilon^2;$$

mais, comme l_1 et l_2 sont les limites respectives vers lesquelles tendent λ_1 et λ_2, on peut écrire

$$\lambda_1 - \lambda_2 + l_1 - l_2 = 2(l_1 - l_2) + \eta,$$

η ayant pour limite zéro quand ε tend vers zéro; on voit donc que

$$\lambda' - \lambda'' = \frac{2C\varepsilon + C''\varepsilon^2}{2(l_1 - l_2) + \eta},$$

$\lambda' - \lambda''$ a donc le signe de $\frac{C\varepsilon}{l_1 - l_2}$; on connaît donc les valeurs de $\lambda' + \lambda''$ et de $\lambda' - \lambda''$.

Si l'on fait

$$A' = A'_1 + A'_1\varepsilon,$$

on aura

$$\lambda' + \lambda'' = A'_1\varepsilon + A''_1\varepsilon^2,$$

$$\lambda' - \lambda'' = \frac{C}{l_1 - l_2}\varepsilon + C''\varepsilon^2;$$

par suite,

$$2\lambda' = \left(A'_1 + \frac{C}{l_1 - l_2}\right)\varepsilon + \ldots,$$

$$2\lambda'' = \left(A'_1 - \frac{C}{l_1 - l_2}\right)\varepsilon + \ldots;$$

λ' et λ'' ont donc les signes des quantités

$$A'_1 + \frac{C}{l_1 - l_2}, \quad A'_1 - \frac{C}{l_1 - l_2}.$$

Si l'on prend pour l_1 la racine

$$l_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2},$$

l_2 sera

$$l_2 = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2},$$

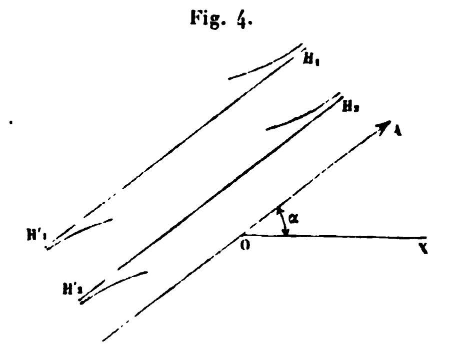
et

$$2\lambda' \text{ aura le signe de } \left(A'_1 + \frac{C}{\sqrt{A^2 - 4B}}\right)\varepsilon,$$

$$2\lambda'' \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \left(A'_1 - \frac{C}{\sqrt{A^2 - 4B}}\right)\varepsilon.$$

Ces formules nous permettent de construire la courbe autour de ses asymptotes. Nous supposons $A^2 - 4B > 0$; cette condition est nécessaire pour que les racines ρ_1, ρ_2 soient réelles pour des valeurs de ω suffisamment voi-

Fig. 4.



sines de α. La *fig.* 4 a été construite dans l'hypothèse où les deux coefficients de ε dans λ' et λ'' sont positifs.

Si $A^2 - 4B < 0$, le point à l'infini est isolé, ρ_1 et ρ_2 sont imaginaires.

6. Si $A^2 - 4B = 0$, les racines de l'équation du second degré en l sont égales, les deux asymptotes se confondent, et l'asymptote unique que l'on obtient a pour équation

$$\rho \sin(\omega - \alpha) = \frac{A}{2}$$

ou bien

$$\rho \sin(\omega - \alpha) = -\frac{\varphi'_{m-1}(\alpha)}{\varphi''_m(\alpha)}.$$

Nous allons construire la courbe autour de cette asymptote

Dans ce cas,

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda' - \lambda''$$

et, par suite,

$$(\lambda' - \lambda'')^2 = \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2}[(2AA' - 4B')\varepsilon + A'^2\varepsilon^2].$$

Cette équation se met aisément sous la forme

$$(\lambda' - \lambda'')^2 = 2C\varepsilon + C_1\varepsilon^2 + C_2\varepsilon^3,$$

et l'on a

$$\lambda' + \lambda'' = A'_1\varepsilon + A''_1\varepsilon^2;$$

ces formules nous montrent que $C\varepsilon$ doit être positif, pour que $\lambda' - \lambda''$ et, par suite, λ' et λ'' soient réels; ε ne peut recevoir que des valeurs d'un signe déterminé; c'est le terme $\pm\sqrt{C\varepsilon}$ qui donne son signe à λ' et λ'' qui sont, par suite, de signe contraire. Comme l'on a $A^2 - 4B = 0$, on a forcément B positif; par suite, la formule

$$\rho_1\rho_2 = \frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon^2}$$

nous montre que ρ_1 et ρ_2 sont de même signe; on obtient donc une disposition de la courbe analogue à celle de la *fig.* 5. Le point à l'infini est de rebroussement de première espèce.

Mais, si $C = 0$, $(\lambda' - \lambda'')^2$ prendra la forme

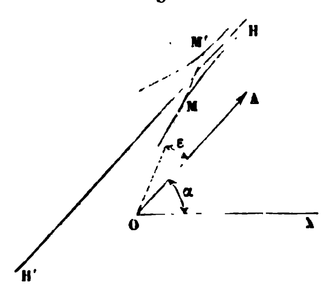
$$(\lambda' - \lambda'')^2 = C_1\varepsilon^2 + C_2\varepsilon^3,$$

et, par suite, $\lambda' - \lambda''$ est aussi voisin que l'on veut de $\pm\varepsilon\sqrt{C_1}$.

Si $C_1 < 0$, le point de rebroussement à l'infini est

isolé; si $C_1 > 0$, des branches de courbes réelles accom-

Fig. 5.



pagneront l'asymptote, et l'on aura pour $\lambda' - \lambda''$ une expression de la forme

$$\lambda' - \lambda'' = \pm (\varepsilon \sqrt{C_1} + \varepsilon^2 C'_1 + \ldots);$$

d'autre part,

$$\lambda' + \lambda'' = A'_1 \varepsilon + A''_1 \varepsilon^2;$$

par suite,

$$2\lambda' = (A'_1 + \sqrt{C_1})\varepsilon + \ldots,$$

$$2\lambda'' = (A'_1 - \sqrt{C_1})\varepsilon + \ldots;$$

en prenant le signe + devant le radical, ce qui est permis, λ' et λ'' ont le signe du coefficient de ε.

Si ces coefficients sont de même signe, on obtient la

Fig. 6.

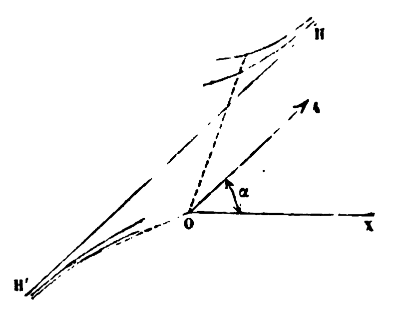


fig. 6; s'ils sont de signe contraire, on obtient la *fig.* 7.

La *fig.* 6 a été construite dans l'hypothèse où les coefficients de ε dans λ' et dans λ'' sont positifs.

Mais, si $C_1 = 0$,

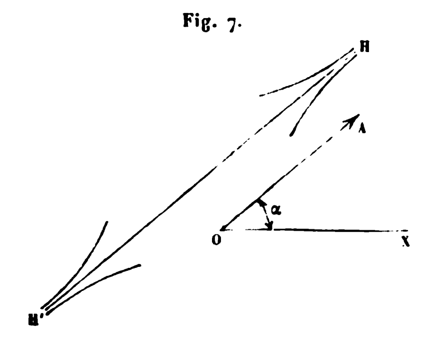
$$\lambda' - \lambda'' = \pm\sqrt{C_2}\,\varepsilon^{\frac{3}{2}},$$

$$2\lambda' = A'_1\,\varepsilon + \sqrt{C_2}\,\varepsilon^{\frac{3}{2}} + A'_2\,\varepsilon^2,$$

$$2\lambda'' = A'_1\,\varepsilon - \sqrt{C_2}\,\varepsilon^{\frac{3}{2}} + A'_2\,\varepsilon^2;$$

ε ne peut plus recevoir que des valeurs du signe de C_2 (on peut substituer à C_2 la valeur que prend cette fonc-

Fig. 7.



tion pour $\varepsilon = 0$); on voit que λ' et λ'' seront de même signe; ce signe est celui de $A'_1\,\varepsilon$. On obtient un rebroussement de seconde espèce. (*A suivre.*)

SUR LES PUISSANCES DES NOMBRES;

PAR M. WILLY TH. LEWY.

---

1. On peut déduire de la théorie des restes la remarque suivante :

Lorsque l'on considère les puissances successives d'un nombre par rapport à un nombre quelconque, mais

constant, si l'on retranche des différentes puissances autant de fois le nombre constant qu'il est possible, les restes de la division des puissances par le nombre constant se reproduisent périodiquement et la période se compose d'une certaine quantité de nombres, nécessairement inférieure au nombre constant considéré.

Si l'on considère de cette manière les puissances successives d'un nombre dont la somme des chiffres est égale à 2 (2, 11, 20, 101, 1001, ...), il est facile de vérifier par le calcul que les restes de la division par 9 des puissances successives de ces nombres se reproduisent périodiquement et sont, pour une période,

$$(-2, -4) +1, +2, +4, -1, -2, -4.$$

Nota. — Les chiffres entre parenthèses indiquent les premiers restes et sont placés entre parenthèses de manière à mieux faire voir que la période +1 indique qu'il faut ajouter 1 à la puissance considérée pour en faire un multiple de 9; —1, qu'il faut retrancher 1.

De même, la période des restes, par rapport au nombre constant 9, des puissances successives des nombres dont la somme des chiffres est égale à 4 (4, 13, 22, 31, 40, 103, ...), est

$$-4, +2, -1.$$

La série des puissances des nombres dont la somme des chiffres est égale à 5 (5, 14, 23, ...), a pour période des restes

$$+4, +2, +1, -4, -2, -1,$$

qui est précisément l'inverse de la période donnée pour les puissances de 2, 11, 101, ...

Pour les puissances des nombres dont la somme des chiffres est 7 (7, 16, 25, ...), on a la période

$$+2, -4, -1,$$

inverse de celle des puissances de 4, 13, ...

Enfin, pour les puissances successives des nombres dont la somme des chiffres est 8(8, 17, 26, ...), les restes des divisions par 9 sont

$$+1, \quad -1.$$

Remarque. — Les nombres dont les puissances successives, divisées par 9, donnent des séries de restes inverses, sont différents de 3, comme 2 et 5, 4 et 7, comme le sont précisément les nombres 3, 6 et 9 dont les restes, 0, peuvent être considérés comme formant des périodes inverses.

2. On peut conclure de la théorie des restes que, si l'on divise les puissances d'un nombre par les nombres 10, 100, 1000, ..., les restes se reproduiront périodiquement, c'est-à-dire que, si l'on considère les puissances successives d'un nombre, les chiffres des dizaines, des centaines, des mille, etc., se reproduiront périodiquement.

De l'examen du tableau que l'on peut former en considérant des puissances successives des quarante premiers nombres, on peut déduire les remarques suivantes :

1° Les puissances des nombres impairs, dont le chiffre des dizaines est un nombre pair, n'ont, comme chiffre des dizaines, que des nombres pairs.

2° Les puissances des nombres impairs, dont le chiffre des dizaines est un nombre impair, ont, comme chiffres des dizaines, alternativement un nombre impair et un nombre pair.

3° Lorsque, dans la période des chiffres des dizaines des puissances d'un nombre quelconque, tous les chiffres se trouvent compris une fois, et une fois seulement, un chiffre pair alterne avec un chiffre impair.

4° Lorsque tous les chiffres se trouvent répétés deux fois, et deux fois seulement, dans la série des chiffres des dizaines des puissances d'un nombre pair, deux chiffres pairs alternent avec deux chiffres impairs.

5° Lorsque tous les chiffres se trouvent répétés deux fois, et deux fois seulement, dans la série des chiffres des dizaines des puissances d'un nombre impair, un chiffre pair alterne avec un chiffre impair.

6° Les périodes des chiffres des centaines des puissances d'un nombre quelconque peuvent se diviser en parties de périodes.

Les périodes des chiffres des centaines se composent de deux, cinq ou dix parties.

Ces parties comprennent autant de chiffres qu'en contient la période complète des chiffres correspondants des dizaines.

Suivant que la période des chiffres des dizaines est plus ou moins considérable, la période correspondante des chiffres des centaines se compose d'un nombre inversement plus ou moins restreint de parties.

7° Les différentes parties des périodes des chiffres des centaines des puissances d'un nombre peuvent se déduire les unes des autres en ajoutant à chaque chiffre correspondant de la partie précédente soit un nombre constant, soit deux ou quatre nombres constants qui peuvent se réduire à un ou deux nombres constants en valeur absolue, tantôt négatifs, tantôt positifs, suivant une loi constante.

Suivant que ces nombres constants sont plus ou moins grands, le nombre des parties de période est inversement plus ou moins grand.

On conçoit en effet que, si le nombre constant est 1, il faille dix parties de période pour retrouver la première partie ; que si, au contraire, les nombres constants sont

2 et 4, il faille seulement cinq parties de période pour retrouver la première partie.

8° Lorsque la période des chiffres des dizaines des puissances d'un nombre se compose d'un nombre pair de chiffres, on peut la subdiviser en deux parties qui comprennent chacune la moitié des chiffres et dont la seconde peut se déduire de la première, suivant une loi constante.

9° Lorsque la période des chiffres des dizaines se compose d'un nombre de chiffres impair, on peut, en ajoutant un nombre constant au chiffre précédent dans la période, trouver le suivant.

D'ailleurs une période de chiffres de dizaines n'est composée d'un nombre impair de chiffres que lorsque tous les chiffres qui la composent sont les cinq chiffres impairs ou zéro.

10° Les nombres dont les périodes des chiffres des unités offrent de grandes analogies les uns avec les autres sont précisément ceux dont la somme des chiffres des unités est égale à 10

o et 10, 1 et 9, 2 et 8, 3 et 7, 4 et 6, 5 et 5.

11° D'une manière générale, on peut dire qu'il n'y a, pour tous les nombres depuis o jusqu'à l'infini, que vingt périodes de chiffres des dizaines distinctes, qu'on peut résumer dans le Tableau synoptique suivant :

La période des chiffres des dizaines des nombres qui se terminent par

01, 21, 41, 61, 81	comprend	1	fois tous les chiffres		
02, 22, 42, 62, 82	»	2	»	»	
03, 23, 43, 63, 83	»	4	»	»	pairs
04, 24, 44, 64, 84	»	1	»	»	
05, 25, 45, 65, 85 est	2				
06, 26, 46, 66, 86	»	1	»	»	

07, 27, 47, 67, 87	comprend	4	fois tous les	chiffres	pairs
08, 28, 48, 68, 88	»	2	»	»	
09, 29, 49, 69, 89	»	2			pairs
10, 30, 50, 70, 90	est	0			
11, 31, 51, 71, 91	»	1	»	»	
12, 32, 52, 72, 92	»	2	»	»	
13, 33, 53, 73, 93	»	2	»	»	
14, 34, 54, 74, 93	»	1	»	»	
15, 35, 55, 75, 95	est	2, 7			
16, 36, 56, 76, 96	»	1	»	»	impairs
17, 37, 57, 77, 97	»	2	»	»	
18, 38, 58, 78, 98	»	2	»	»	
19, 39, 59, 79, 99	»	1	»	»	
20, 40, 60, 80, 00	est	0			

12° Les chiffres qui composent les périodes des dizaines ne se reproduisent pas dans le même ordre pour les nombres dont la différence est 20 ; mais, étant donné l'ordre des chiffres d'une des périodes, on peut trouver l'ordre des chiffres des quatre périodes correspondantes. en prenant soit tous les 13, soit tous les 15, soit tous les 17 chiffres et d'une manière générale tous les $n^{\text{ièmes}}$ chiffres de la période donnée. Ainsi, étant donnée la période des chiffres des dizaines d'un nombre qui se termine par 03, on a celle des nombres qui se terminent par 23, en prenant tous les 13 chiffres de la première; celle des nombres qui se terminent par 43, en prenant tous les 15 chiffres de la première, celle des nombres qui se terminent par 63, en prenant tous les 17 chiffres de la première, et ainsi de suite.

13° On pourrait de même tirer l'ordre des chiffres des périodes des dizaines des nombres qui se terminent par 41, 61, 81, en prenant tous les 17, 13 et 19 chiffres des nombres qui composent la période des chiffres des dizaines des puissances des nombres qui se terminent par 21, etc.

14° Souvent même, on peut déduire les chiffres des

dizaines des puissances successives d'un nombre par la considération de la période correspondante pour un nombre inférieur à dix unités seulement.

C'est ainsi qu'on peut obtenir la période des chiffres des puissances de

12	en prenant les	9	chiffres de la période correspondante de				2.
14	»	3	»	»	»		4
16	»	3	»	»	»		6
18	»	5	»	»	»		8
21	»	2	»	»	»		11
22	»	13	»	»	»		12

....

15° Pour 3 et 13, 7 et 17, 9 et 19, on conçoit *a priori* qu'il ne peut en être absolument de même, puisque 3, 7 et 9 n'admettent que des chiffres pairs, tandis que 13, 17 et 19 admettent aussi des chiffres impairs. Pour pouvoir comparer les périodes des chiffres des dizaines des puissances successives de ces nombres, il ne faudra considérer que les chiffres pairs dans 13, 17 et 19, et alors, pour avoir la suite des chiffres pairs, dans

13	on prend tous les	6	chiffres de la période correspondante de			3
19	»	4	»	»	»	9

Vu la particularité de la période des chiffres des dizaines des puissances successives du nombre 7, il est assez naturel qu'il y ait une remarque particulière à faire sur la relation qui existe entre la période des chiffres des dizaines de 7 et de 17 ; elle se tire de la comparaison obtenue en ne considérant que les chiffres pairs de part et d'autre.

On a pour 7 : — 4400, et pour 17 :

(826) — 44 — (628) — 00.

16° Quelques nombres, comme 7, 18, 32, ont des périodes des chiffres des dizaines assez particulières, en ce

sens qu'elles sont un peu différentes de ce que, suivant la loi générale, elles devraient être. Ces particularités (qui ne sont pas, à proprement parler, des exceptions, puisqu'on peut par une loi constante, mais particulière, tirer les périodes des chiffres des dizaines de ces nombres, en les extrayant des périodes des chiffres des dizaines des puissances des nombres différant de 20 de ces nombres) doivent être traitées à part. On pourrait ainsi faire un tableau synoptique à l'aide duquel, et sans aucun calcul, on pourrait immédiatement trouver, par une simple lecture, la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre quelconque donné, et la racine quelconque d'un nombre quelconque.

USAGE DES TABLES CITÉES PLUS HAUT.

Soit à trouver, par exemple, la 5e puissance du nombre 15.

Examinons le Tableau dont nous avons parlé précédemment.

On y voit :

1° Que le chiffre des unités est toujours 1;

2° Que la période des chiffres des dizaines est 2,7; mais que le chiffre des dizaines de la première puissance est 1; donc le chiffre des dizaines de toutes les puissances d'ordre impair, et par conséquent de la cinquième puissance, est 7;

3° Que la période des chiffres des centaines est 3,6; mais que les chiffres des centaines des deux premières puissances sont 0 et 2; donc le chiffre des centaines de toutes les puissances d'ordre impair, et par conséquent de la cinquième puissance, est 3;

4° Que la période des chiffres des mille est 0,9: mais que les chiffres des mille des trois premières puis-

sances ne rentrent pas dans la période; donc le chiffre des mille de toutes les puissances d'ordre impair (sauf les trois premières), et par conséquent de la cinquième puissance, est 9;

5° Que la période des chiffres des dix mille est 5,9; mais que les chiffres des dix mille des quatre premières puissances ne rentrent pas dans la période; donc le chiffre des dix mille de toutes les puissances d'ordre impair (sauf les quatre premières), et par conséquent de la cinquième puissance, est 5;

6° Que le chiffre des cent mille est 7.

7° Que tous les chiffres représentant les unités d'ordre supérieur sont 0.

On conclut donc, par une simple lecture du Tableau dont nous parlons, que la cinquième puissance de 15 est 759375.

3. Il peut arriver dans certains calculs qu'on soit amené à chercher la racine d'indice inconnu d'un nombre, qu'on sait être une puissance exacte. Pour trouver cette racine, il faudrait décomposer le nombre donné en ses facteurs premiers; mais cette manière d'opérer peut être longue.

Au contraire, en se servant des Tables dont il a été question plus haut, on peut résoudre le problème par une simple lecture et d'une manière, par conséquent, beaucoup plus rapide.

On demande, par exemple, la racine d'indice inconnu du nombre 5159780352, qui est par hypothèse une puissance exacte.

Nota. — Comme nous n'avons fait les Tables que pour les nombres inférieurs à 40, nous avons pris la puissance d'un nombre inférieur à 40. Faisons la somme des chiffres de ce nombre; en retranchant de cette somme autant

de fois le nombre 9 qu'il est possible, le reste est 0; on sait, par les remarques que nous avons faites au commencement, qu'il n'y a que les puissances des nombres multiples de 3 qui donnent ce reste; le nombre donné, étant, par hypothèse, une puissance exacte d'un nombre inférieur à 40, est donc une puissance d'un des nombres suivants :

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39.

Mais le nombre donné est un nombre pair; il ne peut donc être une puissance d'un nombre impair; éliminons les nombres impairs de la série considérée, il reste comme racines possibles du nombre donné les nombres

6, 12, 18, 24, 30, 36.

30 s'élimine de suite; car toutes ses puissances ont 0 pour chiffre des unités.

De plus, le chiffre des unités du nombre donné est 2; on voit dans la Table que les nombres terminés par 4 et 6 n'admettent pas 2 dans la période des chiffres des unités de leurs puissances. Le nombre considéré est donc une puissance de 12 ou de 18.

Pour savoir quelle est la racine du nombre, il faut avoir recours au chiffre des dizaines de ce nombre; ce chiffre est 5.

Si nous regardons la Table, nous voyons que, parmi les chiffres qui composent la période des chiffres des dizaines des puissances de 12, se trouve le chiffre 5; le nombre considéré peut donc être une puissance de 12.

Si nous considérons, dans la Table, la période des chiffres des dizaines des puissances de 18, nous voyons que cette période ne comprend pas le chiffre 5; le nombre donné ne peut donc pas être une puissance de 18.

Le nombre donné est donc une puissance de 12.

Cherchons maintenant quel est l'exposant du nombre 12 dans le nombre considéré.

Le chiffre des unités du nombre donné est 2 ; or on voit dans la Table que la période des chiffres des unités des puissances successives est 2, 4, 8, 6 ; une puissance de 12 qui se termine par le chiffre 2 est d'ordre (multiple de $4+1$), c'est-à-dire 1, 5, 9, 13, 17, ...

D'autre part, on voit dans la Table que la période des chiffres des dizaines des puissances successives de 12 est

1, 4, 2, 3, 3, 8, 0, 9, 5, 2, 8, 5, 7, 6, 6, 1, 9, 0, 4, 7.

Le chiffre des dizaines du nombre donné est 5 ; donc, par rapport à ce chiffre seulement, le nombre donné est une puissance d'ordre neuvième ou douzième,

$$9 = \text{multiple de } 4+1; \quad \text{mais} \quad 12 \gtrless \text{multiple de } 4+1.$$

L'exposant de la racine 12 dans le nombre donné est donc 9.

Le nombre donné 5159780352 est donc $= 12^9$.

Pour peu qu'on ait un peu l'habitude des Tables dont nous avons parlé, on résout le problème avec d'autant plus de rapidité que (sauf ce qui concerne la première opération, faire la somme des chiffres du nombre donné) on n'a généralement à considérer que les deux ou les trois derniers chiffres du nombre donné.

ÉCOLE NAVALE (CONCOURS DE 1884).

Arithmétique et Algèbre.

1. Déterminer combien il y a de nombres moindres que 60, et premiers avec lui.

Donner et démontrer la formule permettant de résoudre cette question d'une manière générale.

2. Un industriel a emprunté, le 1er janvier 1880, une somme de 33 640fr dont il s'est acquitté en deux payements égaux chacun à 19 948fr, 10. Le premier de ces payements a été effectué le 1er janvier 1882, et le second le 1er janvier 1884. On demande à quel taux exact l'emprunt a été fait, sachant que, pour ces sommes, on a tenu compte des intérêts composés.

Géométrie.

1. Démontrer que le rapport d'une circonférence à son diamètre est un nombre constant. Quelles sont les différentes méthodes que l'on peut employer pour calculer ce nombre? Principes sur lesquels repose la méthode des isopérimètres.

2. On a deux circonférences concentriques A et B, qui sont partagées en un même nombre n de parties égales : soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les points de division de la première; $B_1, B_2, \ldots, B_n$ les points de division de la seconde. On mène $A_1 B_1, A_2 B_2, \ldots, A_n B_n$: soient C_1 le point de rencontre de $A_1 B_1$ avec $A_2 B_2$, C_2 le point de rencontre de $A_2 B_2$ avec $A_3 B_3$, ... Démontrer que le polygone $C_1 C_2 \ldots C_n$ est régulier. Chercher comment varie la surface du polygone quand on fait tourner la circonférence B autour de son centre, la circonférence A restant fixe et les points de division restant les mêmes: maximum et minimum.

Géométrie descriptive.

Tracer les projections d'un tétraèdre SABC satisfaisant aux conditions suivantes :

On donne les projections (a, a') de A

$$(a\alpha = 0^{m},040, \ a'\alpha = 0^{m},060).$$

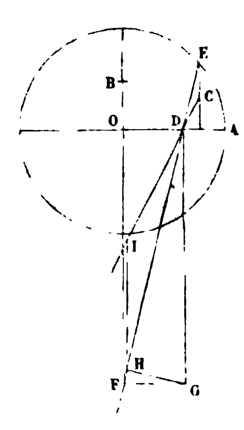
Le plan prolongé de la base ABC fait un angle de 40°

avec la partie postérieure du plan horizontal et passe par un point donné ω de xy ($\alpha\omega = 0^m,110$). Le sommet B est dans le plan horizontal, à l'intersection de la perpendiculaire abaissée de A sur la trace horizontale du plan prolongé de ABC. L'arête SC est perpendiculaire au plan de la base ABC, et son prolongement coupe xy en un point donné γ ($\alpha\gamma = 0^m,040$). La longueur de l'arête SC est égale à $0^m,070$, et S est supposé au-dessus du plan de la base.

CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE EN UN POINT D'UNE ELLIPSE;

PAR M. A. LA CHESNAIS,
Élève du lycée Condorcet.

Soit CD la normale au point C de l'ellipse dont les axes sont OA, OB. Le point C est la projection du



point E du cercle homographique, la normale CD est la projection de la droite ED du plan du cercle homogra-

phique. La développée

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}$$

est la projection de la courbe

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+\left(b\,\frac{a}{b}\,y\right)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}\quad \text{ou}\quad x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{c^2}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$$

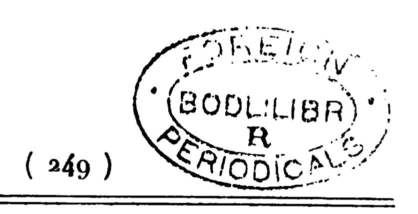
du plan du cercle homographique; cette courbe est l'enveloppe d'une droite de longueur $\frac{c^2}{a}$ dont les extrémités décrivent OA et OB. On construit le point de contact de cette droite avec son enveloppe en abaissant de G, intersection des perpendiculaires en D et F aux axes, une perpendiculaire GH sur DF; en abaissant de H une perpendiculaire sur OA, on a en I le centre de courbure.

QUESTIONS.

1530. Soit $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ un heptagone inscrit: d'un sommet on peut mener deux diagonales qui partagent l'heptagone en un quadrilatère et un pentagone: on a ainsi sept diagonales. Les intersections de chaque côté avec les trois diagonales qui ne passent pas par ses extrémités sont sur une quintique.

(A. La Chesnais.)

1531. Le parallélépipède construit sur trois génératrices quelconques d'un hyperboloïde à une nappe a un volume constant. (Genty.)



SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES DONT L'ÉQUATION EST DONNÉE EN COORDONNÉES POLAIRES

[FIN (¹)];

PAR M. CH. BIEHLER.

III.

BRANCHES PARABOLIQUES DANS LES COURBES DONT L'ÉQUATION EST DONNÉE EN COORDONNÉES POLAIRES.

1. Soit toujours

$$\rho^m \varphi_m(\omega) + \rho^{m-1}\varphi_{m-1}(\omega) + \ldots + \rho\varphi_1(\omega) + \varphi(\omega) = 0$$

l'équation de la courbe Nous avons vu que, quand α est une racine simple de l'équation $\varphi_m(\omega) = 0$, la racine ρ_1, qui augmente indéfiniment quand ω tend vers α, donne naissance à une branche de courbe hyperbolique.

Nous allons supposer actuellement que α est racine double de l'équation $\varphi_m(\omega) = 0$, c'est-à-dire

$$\varphi_m(\alpha) = 0, \quad \varphi'_m(\alpha) = 0;$$

nous supposerons en outre que α n'annule pas $\varphi_{m-1}(\omega)$.

Dans ce cas, la racine ρ_1, qui augmente indéfiniment, nous donne l'équation

$$\rho_1 + S_1 = -\frac{\varphi_{m-1}(\alpha+\varepsilon)}{\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''_m(\alpha) + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\varphi'''_m(\alpha) + \ldots};$$

S_1 étant une quantité finie, d'après nos hypothèses, ρ_1 aura le signe de

$$-\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi''_m(\alpha)};$$

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3ᵉ série, t. IV, p. 223.

de plus, en désignant par λ_1 la fonction $\rho_1 \sin\varepsilon$, il vient

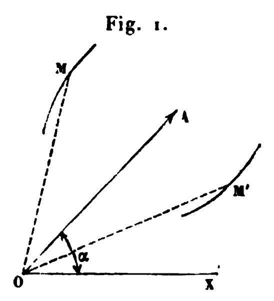
$$\lambda_1 = -\left[S_1\varepsilon^2 + \frac{\varphi_{m-1}(\alpha)+\ldots}{\frac{1}{1.2}\varphi''_m(\alpha)+\frac{\varepsilon}{1.2.3}\varphi'''_m(\alpha)+\ldots}\right]\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon^2}.$$

On voit par cette formule que λ_1 augmente indéfiniment quand ε tend vers zéro et que le signe de λ_1 est celui de

$$-\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi''_m(\alpha)}\varepsilon.$$

Le signe de λ_1 change donc avec ε. En se reportant à la signification géométrique de λ_1, on voit que la racine ρ_1 engendre une branche de courbe qui s'éloigne indéfiniment du rayon polaire OA mené sous l'angle α quand ε tend vers zéro. Le signe $-\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi''_m(\alpha)}$ donne d'ailleurs la disposition des branches de courbe par rapport au rayon OA. Si $-\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi''_m(\alpha)}$ est positif, la courbe présente la disposition de la *fig.* 1; car à une valeur po-

Fig. 1.



sitive de ε correspond une valeur positive de λ et à une valeur négative de ε une valeur négative de λ.

2. Supposons maintenant

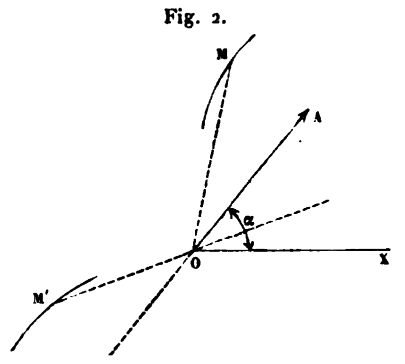
$$\varphi_m(\alpha)=0,\quad \varphi'_m(\alpha)=0,\quad \ldots,\quad \varphi_m^{(p-1)}(\alpha)=0,$$
$$\varphi_m^{(p)}(\alpha)\gtrless 0,\quad \varphi_{m-1}(\alpha)\gtrless 0.$$

On verra, comme dans le cas précédent, que la racine, qui augmente indéfiniment quand ε tend vers zéro, engendre une branche parabolique dont la forme générale est celle de la *fig.* 1 quand p est un nombre pair. Mais, si p est impair, λ_1 ayant une expression dont le signe est donné par

$$-\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi_m^{(p)}(\alpha)}\varepsilon^{p-1},$$

on voit que λ_1 ne change pas de signe avec ε; on obtient alors une disposition de la courbe analogue à celle de la *fig.* 2.

Fig. 2.



3. Considérons actuellement le cas où

$$\varphi_m(\alpha)=0,\quad \varphi'_m(\alpha)=0,\quad \varphi''_m(\alpha)=0,\quad \varphi_{m-1}(\alpha)=0,$$
$$\varphi'''_m(\alpha)\gtrless 0,\quad \varphi'_{m-1}(\alpha)\gtrless 0.$$

Deux racines ρ_1 et ρ_2 de l'équation de la courbe tendront vers l'infini et l'on aura des expressions de la forme

$$\rho_1+\rho_2=\frac{A+A'\varepsilon}{\varepsilon^2},$$

$$\rho_1\rho_2=\frac{B+B'\varepsilon}{\varepsilon^3},$$

pour les fonctions $\rho_1+\rho_2$ et $\rho_1\rho_2$.

En désignant, comme nous l'avons fait dans la théorie des asymptotes, par λ_1 et λ_2 les quantités $\rho_1 \sin\varepsilon$, $\rho_2 \sin\varepsilon$, il viendra

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\,\frac{A + A'\varepsilon}{\varepsilon},$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\sin^2\varepsilon}{\varepsilon^2}\,\frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon}.$$

On voit que la somme et le produit des quantités $\lambda_1 \lambda_2$ augmentent indéfiniment; mais, si l'on divise membre à membre ces égalités, on obtiendra

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon}\,\frac{A + A'\varepsilon}{B + B'\varepsilon};$$

par suite, quand ε tendra vers zéro, la somme $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$ tend vers la quantité finie $\frac{A}{B}$; il en résulte que l'une des quantités λ augmente indéfiniment et que l'autre tend vers une limite finie $\frac{B}{A}$.

L'une des racines, ρ_1 par exemple, augmente donc indéfiniment en engendrant une branche parabolique, et l'autre ρ_2 engendrera une branche hyperbolique dont l'asymptote correspondante a pour équation

$$\rho \sin(\omega - \alpha) = \frac{B}{A}.$$

La branche parabolique se construit aisément, car on a

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{A + A'\varepsilon}{\varepsilon}\,\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon},$$

et, comme λ_2 a pour limite $l_2 = +\frac{B}{A}$, λ_2 aura le signe de $\frac{A}{\varepsilon}$; la disposition de la courbe est donc analogue à celle de la *fig.* 1.

Quant à la branche hyperbolique, il suffit, pour la

construire, de connaître le signe de la différence

$$\lambda_2 - \frac{B}{A} = \lambda'.$$

Or on tire évidemment des formules précédentes

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon}\,\frac{A + A'\varepsilon}{B + B'\varepsilon},$$

$$\frac{1}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{\varepsilon^2}{\sin^2\varepsilon}\,\frac{1}{B + B'\varepsilon},$$

et, par suite,

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{\sin^2\varepsilon}\left(\frac{A + A'\varepsilon}{B + B'\varepsilon}\right)^2 - \frac{4\varepsilon^3}{\sin^2\varepsilon}\,\frac{1}{B + B'\varepsilon},$$

d'où

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon}\,\frac{A + A'\varepsilon}{B + B'\varepsilon} - \frac{\varepsilon^2}{\sin\varepsilon}\,\frac{1}{A + A'\varepsilon} + \ldots.$$

Si A'_1 et B'_1 sont les parties indépendantes de ε dans A' et B', la différence $\frac{1}{\lambda_2} - \frac{A}{B}$ a pour premier terme

$$\left[\frac{BA'_1 - AB'_1}{B^2} - \frac{1}{A}\right]\varepsilon;$$

le signe du coefficient de ε donne la position de la courbe par rapport à son asymptote.

4. Passons au cas où l'on aurait

$$\varphi_m(\alpha) = 0,\quad \varphi'_m(\alpha) = 0,\quad \varphi''_m(\alpha) = 0,$$

avec

$$\varphi_{m-1}(\alpha) = 0,\quad \varphi'_{m-1}(\alpha) = 0,$$

$$\varphi'''_m(\alpha) \gtrless 0,\quad \varphi''_{m-1}(\alpha) \gtrless 0,\quad \varphi_{m-2}(\alpha) \gtrless 0.$$

Deux racines tendent encore vers l'infini, et pour ce cas on a les deux formules

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{A + A'\varepsilon}{\varepsilon},$$

$$\rho_1\rho_2 = \frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon^3},$$

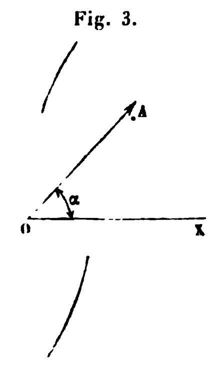
par suite

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} (A + A'\varepsilon),$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2} \left(\frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

$\lambda_1 + \lambda_2$ reste fini, mais le produit $\lambda_1 \times \lambda_2$ augmente indéfiniment, et il est du signe de $\frac{B}{\varepsilon}$; on en conclut que λ_1 et λ_2 augmentent indéfiniment et sont de signe contraire.

Fig. 3.



Pour avoir la position de la courbe, il suffit de former l'expression de $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$. Or on a

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \left[\frac{(A + A'\varepsilon)^2 \varepsilon - 4(B + B'\varepsilon)}{\varepsilon}\right] \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2};$$

par conséquent $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$ n'est positif que quand $-\frac{4B}{\varepsilon}$ est positif, c'est-à-dire quand ε est de signe contraire à B.

La *fig*. 3 a été construite dans l'hypothèse de B négatif.

5. Supposons maintenant

$$\varphi_m(x) = 0, \quad \varphi'_m(x) = 0, \quad \varphi''_m(x) = 0, \quad \varphi'''_m(x) = 0$$

avec

$$\varphi_{m-1}(x) = 0, \quad \varphi'_{m-1}(x) = 0$$

et

$$\varphi_m^{\text{IV}}(\alpha) \gtrless 0, \quad \varphi''_{m-1}(\alpha) \gtrless 0, \quad \varphi_{m-2}(\alpha) \gtrless 0.$$

Les racines qui tendent vers zéro nous donnent les relations

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{A + A'\varepsilon}{\varepsilon^2},$$

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon^4};$$

la somme $\rho_1 + \rho_2$ est infinie ainsi que $\rho_1 \times \rho_2$, quand ε s'annule; on a de plus

$$(\rho_1 - \rho_2)^2 = \frac{A^2 - 4B + C\varepsilon}{\varepsilon^4}.$$

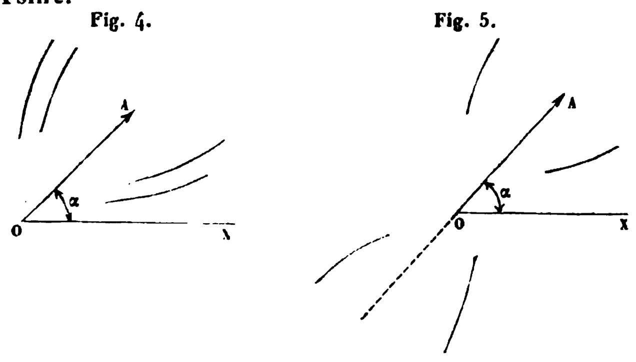
Les racines ne sont donc réelles que si $A^2 - 4B > 0$.

Supposons cette condition remplie, on voit que les quantités λ_1 et λ_2 augmentent toutes deux indéfiniment.

On a, en outre,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \frac{A^2 - 4B + C\varepsilon}{\varepsilon^2}; \ \frac{\sin^2\varepsilon}{\varepsilon^2}.$$

λ_1 et λ_2 sont donc réels, quel que soit le signe de ε; le produit $\lambda_1 \times \lambda_2$ est du signe de B, quel que soit le signe de ε; le signe des quantités λ_1 et λ_2 dépend de celui de $A \sin \varepsilon$.



Si $B > 0$, on a une disposition analogue à celle de la *fig.* 4.

Si $B < 0$, on obtient la *fig.* 5; la *fig.* 4 a été construite dans l'hypothèse de $A > 0$.

6. Si $A^2 - 4B < 0$ le point à l'infini est imaginaire.

Si $A^2 - 4B = 0$, et si l'on pose

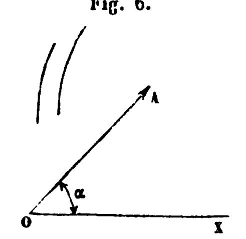
$$C = C_1 + C'_1 \varepsilon,$$

$(\lambda_1 - \lambda_2)^2$ prend la forme

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2} \, \frac{C_1 + C'_1 \varepsilon}{\varepsilon};$$

λ_1 et λ_2 ne sont donc réels qu'autant que C_1 et ε sont

Fig. 6.



de même signe; mais B est, dans ce cas, essentiellement positif, puisque $A^2 = 4B$; par suite, les deux racines ρ_1, ρ_2 sont de même signe, ainsi que λ_1 et λ_2.

On obtient alors une disposition analogue à celle de la *fig.* 6 qui correspond au rebroussement de seconde espèce.

REMARQUES SUR UN ARTICLE DE M. D'OCAGNE;

Par M. E. CESARO,

Élève ingénieur des Mines.

I. Dans la livraison de décembre 1884 des *Nouvelles Annales*, M. d'Ocagne a exposé la théorie des

coordonnées axiales. Deux Notes, au bas de la première page, nous apprennent que ces coordonnées ont été déjà proposées et étudiées par MM. Aoust et Purkiss. Qu'il nous soit permis d'ajouter que nous avons aussi, dans *Mathesis,* traité, sous forme implicite, la même question, et, en particulier, nous avons donné l'équation axiale de la *tractrice,* signalée par M. d'Ocagne à la page 553. C'est à cause de cette équation que nous avons pu considérer la tractrice comme correspondant, par dualité, à la *spirale logarithmique*. D'ailleurs, on peut dire, en général, que *le système des coordonnées axiales et celui des coordonnées polaires sont corrélatifs*. Bien entendu, comme il s'agit ici de *grandeurs* à mesurer, la corrélation est loin d'être parfaite, tant que l'on reste dans le champ de la *Géométrie euclidienne*. Il est, par conséquent, désirable de voir quelque mathématicien s'occuper de l'étude des coordonnées axiales, dans la *Géométrie générale.*

II. 1° A la page 257 de la même livraison, on voit la figure d'une courbe, dont M. d'Ocagne a mis en évidence les remarquables propriétés. Or il n'est pas difficile de voir que la courbe en question est une *développante de cardioïde*. Ceci est une conséquence immédiate de la propriété suivante, facile à démontrer : *La normale, limitée aux axes, est égale à* $2a$. En outre, la théorie des mouvements plans fournit, pour le centre de courbure, une construction fort simple, fondée sur ce que *la projection de l'origine sur la normale et le centre de courbure sont également éloignés du milieu de la normale, limitée aux axes.*

2° On peut, par le pur calcul, arriver fort simplement à découvrir que la développée de la courbe dont il s'agit est une cardioïde. Observons d'abord que,

lorsqu'on est parvenu à trouver, en fonction de la coordonnée θ, l'expression $f(\theta)$ du *rayon de courbure*, on obtient l'*équation intrinsèque* de la développée par l'élimination de θ entre les équations

$$\rho = f'(\theta), \quad s = f(\theta).$$

Or, M. d'Ocagne a démontré que

$$f(\theta) = \frac{a}{2}(1 + 3\cos 2\theta).$$

L'équation de la développée résulte donc de l'élimination de θ entre les équations

$$\rho = -3a\sin 2\theta, \quad s = \frac{a}{2}(1 + 3\cos 2\theta).$$

Il est, d'ailleurs, permis de remplacer s par $s + \frac{a}{2}$, en choisissant convenablement l'origine des arcs. On trouve enfin

$$\rho^2 + 4s^2 = 9a^2.$$

Cette équation représente une *hypocycloïde* à quatre rebroussements, engendrée par un point d'une circonférence, de diamètre a, roulant, sans glisser, à l'intérieur d'une circonférence de diamètre quadruple.

III. Une des propriétés les plus importantes, qui n'a pas été suffisamment remarquée, résulte de la définition même de la courbe, c'est-à-dire de l'égalité $OD = MN$. En effet, en vertu de cette égalité, les triangles rectangles ODT, MNT sont égaux, et, par suite, T *est le milieu de* ON. D'après cela, I est le milieu du segment NN' de la normale, limitée aux axes. Or M. d'Ocagne a démontré que $IN = a$. Donc $NN' = 2a$. Maintenant il est aisé de voir que l'on peut, à la construction indiquée par M. d'Ocagne, substituer la suivante : ayant

pris, sur la circonférence de rayon $2a$, avec le centre en O, un point quelconque J, projetons-le sur les axes Ox, Oy, en N, N′. Le point M est la projection, sur NN′, du milieu T de ON. En outre, la tangente est MT, et le centre de courbure est la projection de J sur NN′.

IV. Une intéressante application des coordonnées axiales consiste dans l'étude des courbes corrélatives des *conchoïdes*. Si l'on fait tourner d'un même angle ω les tangentes à une courbe quelconque A_0, autour des points où elles rencontrent une *droite fixe,* elles enveloppent, dans leurs positions nouvelles, une courbe A_ω. La construction par laquelle les courbes A_ω dérivent de A_0 peut être regardée comme corrélative de celle qui donne les conchoïdes d'une ligne donnée, relativement à un *point fixe*. Les propriétés des courbes A_ω sont des corollaires immédiats de la théorie des mouvements plans; mais nous voulons montrer comment on peut y parvenir par les formules que M. d'Ocagne a établies dans sa Note.

(a) Il est clair, avant tout, que l'équation axiale de A_ω, la droite fixe étant prise comme axe, se déduit de celle de A_0 par le changement de θ en $\theta-\omega$. Les dérivées $\frac{d\lambda}{d\theta}$, $\frac{d^2\lambda}{d\theta^2}$, $\cdots$ sont donc les mêmes pour toutes les courbes. Transportons l'origine au point T, pied commun des tangentes aux courbes A_ω. On sait que les coordonnées du point de contact M_ω de l'une de ces droites avec la courbe correspondante sont

$$x=\frac{d\lambda}{d\theta}\sin(\theta+\omega)\cos(\theta+\omega),\quad y=\frac{d\lambda}{d\theta}\sin^2(\theta+\omega).$$

L'élimination de ω donne

$$x^2+y^2=\frac{d\lambda}{d\theta}y.$$

Par conséquent les points M_ω sont situés sur une circonférence K, de diamètre $\frac{d\lambda}{d\theta}$, tangente à l'axe au point T. Il en résulte que les normales concourent en un même point : c'est le point S, diamétralement opposé à T, sur K. On sait encore que le rayon de courbure de A_ω, au point M_ω, est

$$\rho_\omega=2\frac{d\lambda}{d\theta}\cos(\theta+\omega)+\frac{d^2\lambda}{d\theta^2}\sin(\theta+\omega).$$

Prenons, sur TS, la longueur SU, égale à TS. Transportons l'origine en S et l'axe des y en SU : dirigeons le nouvel axe des x en sens inverse de l'ancien, et prenons, sur sa partie positive, $SV=\frac{d^2\lambda}{d\theta^2}$. D'après la dernière formule, si C_ω est le centre de courbure de A_ω, on a

$$SC_\omega=SV\cos\widehat{USC_\omega}+SU\sin\widehat{USC_\omega}.$$

Le lieu des points C_ω est donc la circonférence K', décrite sur UV comme diamètre.

(b) Parmi les lignes dérivées de A_0, la ligne $A_{\frac{\pi}{2}}$ est particulièrement remarquable. La transformation qui nous donne $A_{\frac{\pi}{2}}$, en partant de A_0, peut être appelée *rectotangentielle :* si on l'applique à $A_{\frac{\pi}{2}}$, on retrouve A_0. Dans la famille des lignes A_ω, chaque ligne a donc sa conjuguée. Une parabole, par exemple, est sa propre transformée rectotangentielle, ou bien celle de son foyer, suivant que l'on choisit pour axe de transformation la directrice ou la tangente au sommet. Les points corres-

pondants de deux lignes conjuguées sont diamétralement opposés, sur K. Il en est de même, sur K′, des centres de courbure. Les deux diamètres font un angle constant, de sorte que leur point d'intersection décrit une circonférence : celle-ci passe par les centres des circonférences K, K′, et par leur point de rencontre Q, autre que S. Il y aurait à considérer, plus généralement, les *transformations axiales* des courbes planes, corrélatives des *transformations centrales*, étudiées par M. d'Ocagne dans *Mathesis*.

(*c*) Le point Q constitue, évidemment, pour la courbe correspondante, un point de rebroussement. Si $\lambda = f(\theta)$ est l'équation axiale de A_0, l'équation du *lieu des rebroussements* résulte de l'élimination de τ entre les égalités

$$\lambda = f(\tau), \quad \operatorname{tang}\theta = -2\frac{f'(\tau)}{f''(\tau)}.$$

Souvent, la construction de Q, moyennant les circonférences K, K′, permet d'obtenir avec plus de facilité le lieu des rebroussements. C'est ainsi que, dans le cas d'une parabole, dont la tangente au sommet est prise comme *axe*, on voit immédiatement que le lieu en question se réduit au foyer. Pour une cycloïde, c'est la base qui est le lieu des rebroussements, lorsqu'on prend pour axe la tangente aux sommets.

(*d*) Le lieu des rebroussements est très important, parce qu'il suffit pour *définir* une famille de lignes A_ω. A cet effet, observons que le point Q est, en vertu de sa définition, un point d'intersection des deux cercles K consécutifs. Il en résulte que l'enveloppe de K est constituée par l'axe et le lieu des rebroussements. Ces deux lignes étant données, si l'on fait mouvoir la cir-

conférence enveloppée, son diamètre $\frac{d\lambda}{d\theta}$ est nécessairement fonction du chemin λ, parcouru par son point de contact avec l'axe. Si l'on écrit la relation existant entre ces grandeurs, on connaîtra par intégration l'équation générale des lignes A_ω, contenant une constante arbitraire. A chaque valeur de la constante correspond une ligne particulière. Il est aisé de reconnaître que, si $\lambda = f(\theta)$ est l'équation axiale de la ligne des rebroussements, l'équation différentielle générale des lignes A_ω résulte de l'élimination de τ entre les égalités

$$\lambda = f(\tau) + f'(\tau)\sin\tau, \quad \frac{d\lambda}{d\theta} = 4f'(\tau)\sin^2\frac{\tau}{2}\ (^1).$$

V. (*a*) Il est important de savoir quelle transformation axiale correspond à la transformation centrale. dite *par rayons vecteurs réciproques*. En cherchant à résoudre cette question, on est inévitablement conduit à étudier la transformation axiale, définie par la relation

$$\tan\frac{\theta_1}{2}\tan\frac{\theta_2}{2} = \text{const.}$$

Si M est un point d'une courbe quelconque, et T le point où la tangente en M rencontre l'axe des λ (*axe de transformation*), la circonférence de centre T, passant par M, est le lieu de tous les points qui correspondent à M sur les différentes *axiales réciproques* de la courbe considérée. Les tangentes à ces courbes, aux points correspondants, *concourent*, par définition, *en un même point*

---

(1) En terminant ces remarques, nous nous apercevons d'avoir appelé improprement *cardioïde*, d'après la nomenclature proposée par quelques géomètres, l'hypocycloïde à *quatre* rebroussements, tandis que c'est à l'épicycloïde à *un* seul rebroussement que l'on donne ordinairement ce nom.

de l'axe. En outre, *elles ont,* d'après ce qui a été dit plus haut, *des longueurs égales,* pourvu qu'on les suppose limitées entre l'axe et leurs points de contact. Ce théorème, corrélatif d'une proposition fort connue dans la théorie de l'inversion polaire, a pour corollaire immédiat la proposition suivante : *Les axiales réciproques d'une tractrice, par rapport à sa directrice, sont les tractrices égales, admettant même directrice* (¹). On doit se rappeler que, dans l'inversion polaire, la spirale logarithmique a pour transformées, relativement à son pôle, les spirales égales, de même pôle.

(*b*) Autre théorème très remarquable : *Les centres de courbure de deux axiales réciproques, en deux points correspondants, sont sur une perpendiculaire à l'axe.* Corollaire : *Un cercle a pour axiale réciproque, par rapport à une droite quelconque, tout cercle qui admet avec lui, pour axe radical, la droite considérée.*

(*c*) Parmi les axiales réciproques d'une courbe donnée il y en a généralement deux, à chaque instant, qui présentent un *point de rebroussement.* Ces points de rebroussement sont, évidemment, ceux où la circonférence (T), *lieu instantané des points de contact,* rencontre la perpendiculaire à l'axe, *lieu instantané des centres de courbure.* C'est en ces points aussi que la même circonférence touche son enveloppe. Le *lieu des rebroussements* coïncide donc avec l'enveloppe de (T). Ces circonstances sont aisées à reconnaître dans le cas de la tractrice. Alors le cercle (T) est invariable, et le

---

(¹) Il y aurait à résoudre la question suivante : *Quelles sont les courbes égales à leurs axiales réciproques?* On sait que la *question corrélative* a été amplement traitée par M. Genocchi.

lieu des rebroussements est constitué par deux parallèles à l'axe, équidistantes de celui-ci. Enfin, les centres de courbures se trouvent sur le diamètre de (T), perpendiculaire à l'axe, propriété connue.

(*d*) M. d'Ocagne, à qui nous avons communiqué ces remarques, nous a fait observer que l'*inversion axiale*, dont il vient d'être question, ne diffère pas essentiellement de la *transformation par semi-droites réciproques*, imaginée par M. Laguerre. Le théorème (*a*) est dû à M. Laguerre, ainsi que le corollaire (*b*). Ce dernier théorème a été, avec quelques autres remarques, le sujet d'une Communication orale, faite par M. d'Ocagne à la *Société Mathématique de France* (18 mai, 1883) (¹). Enfin, nous devons ajouter que, dans ses articles des *Nouvelles Annales*, M. Laguerre n'a pas manqué de faire ressortir la corrélation existant entre les transformations par rayons vecteurs et par semi-droites réciproques. Cependant nous n'avons pas jugé inutile d'appeler de nouveau l'attention des lecteurs sur cette intéressante transformation, surtout pour en donner un exposé pour ainsi dire immédiat, n'exigeant pas de connaissances préalables, ne se rattachant à aucune théorie spéciale, et ne demandant que l'emploi facile et naturel des coordonnées axiales.

(¹) Nous apprenons que M. d'Ocagne va réunir tous ces résultats en une intéressante brochure sur les transformations axiales et, en particulier, sur la transformation *orthotangentielle*, à laquelle M. d'Ocagne est parvenu indépendamment de nos propres recherches. Nous ferons seulement observer que nous avons eu, depuis longtemps, l'idée de cette transformation, comme le prouve la *Question* 296, proposée dans *Mathesis* (t. III).

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1881.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

Par M. P. GIAT,
Elève du lycée Saint-Louis (classe de M. Lucas).

Trouver le lieu des points, tels que les pieds des six normales qu'on peut mener de l'un quelconque d'entre eux à un ellipsoïde donné à trois axes inégaux se séparent en deux groupes de trois points dont les plans respectifs soient parallèles entre eux ([1]).

En prenant pour axes de coordonnées les axes de l'ellipsoïde, l'équation générale des quadriques passant par les pieds des normales issues du point (α, β, γ) est

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1+\lambda\Big[a^2y(x-\alpha)-b^2x(y-\beta)\Big] \\ &\qquad +\mu\Big[b^2z(y-\beta)-c^2y(z-\gamma)\Big] \\ &\qquad +\nu\Big[c^2x(z-\gamma)-a^2z(x-\alpha)\Big]=0. \end{aligned} \right.$$

Pour que cette équation représente un système de deux plans parallèles, il faut d'abord que l'ensemble des termes du second degré soit carré parfait. Ici l'on aura

$$\left(\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}\pm\frac{z}{c}\right)^2.$$

([1]) L'énoncé complet comportait une deuxième partie (*voir* 3e série, t. I, p. 189), qui n'est pas traitée ici.

Prenons d'abord $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2$. Nous en déduisons

$$\lambda=\frac{2}{ab(a^2-b^2)},\quad \mu=\frac{2}{bc(b^2-c^2)},\quad \nu=\frac{2}{ca(c^2-a^2)},$$

et l'équation (1) devient

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2&+2\frac{x}{a}\left(\frac{b\beta}{a^2-b^2}-\frac{c\gamma}{c^2-a^2}\right)\\&+2\frac{y}{b}\left(\frac{c\gamma}{b^2-c^2}-\frac{a\alpha}{a^2-b^2}\right)\\&+2\frac{z}{c}\left(\frac{a\alpha}{c^2-a^2}+\frac{b\beta}{b^2-c^2}\right)-1=0.\end{aligned}$$

Ensuite il faut que l'ensemble des termes du premier degré soit, à un facteur constant près, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$.

On a donc

$$\frac{b\beta}{a^2-b^2}-\frac{c\gamma}{c^2-a^2}=\frac{c\gamma}{b^2-c^2}-\frac{a\alpha}{a^2-b^2}=\frac{a\alpha}{c^2-a^2}-\frac{b\beta}{b^2-c^2},$$

ou, en simplifiant,

$$a\alpha(b^2-c^2)=b\beta(c^2-a^2)=c\gamma(a^2-b^2).$$

Les deux plans parallèles sont alors

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\pm 1.$$

Le lieu du point (α, β, γ) avec les diverses combinaisons de signes se composera par conséquent de quatre droites passant par l'origine et les pieds des normales issues de tous les points de ces droites seront dans les quatre systèmes de deux plans parallèles obtenus en joignant les extrémités des axes de l'ellipsoïde.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

PAR M. P. GIAT,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Lucas).

Étant donné un triangle ABC *inscrit dans un cercle de rayon* R, *on mène les bissectrices intérieures des angles* A, B, C. *Soient* A_1, B_1, C_1 *les points où elles rencontrent le cercle :*

1° *Désignant par* S, S_1 *les aires des triangles* ABC, $A_1B_1C_1$ *et par* d *le diamètre du cercle inscrit au triangle* ABC, *on propose de démontrer que l'on a*

$$\frac{S_1}{S} = \frac{R}{d}.$$

2° *On considère une suite indéfinie des triangles* ABC, $A_1B_1C_1, \ldots, A_nB_nC_n, \ldots$, *tous inscrits dans le même cercle et dont chacun se déduit du précédent comme dans l'énoncé ci-dessus le triangle* $A_1B_1C_1$ *se déduit du triangle* ABC. *Démontrer que, lorsque le nombre entier* m *augmente indéfiniment, le triangle* $A_{2m}B_{2m}C_{2m}$ *tend vers une position limite* $\alpha\beta\gamma$; *dans les mêmes conditions, le triangle* $A_{2m+1}B_{2m+1}C_{2m+1}$ *tend aussi vers une position limite* $\alpha'\beta'\gamma'$; *les deux triangles limites* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *sont équilatéraux et symétriquement placés par rapport au centre du cercle.*

3° *Démontrer que, si l'on prend pour unité le rayon* R *du cercle, le produit des nombres qui mesurent les diamètres des cercles inscrits aux triangles* ABC, $A_1B_1C_1, \ldots, A_nB_nC_n$ *tend vers une limite lorsque* n *augmente indéfiniment.*

1° Désignons par a, b, c, A, B, C, r, R les éléments de ABC, par a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1 les éléments de $A_1B_1C_1$.

On voit facilement que

$$(1)\qquad \begin{cases} A_1 = \dfrac{B+C}{2} = 90^\circ - \dfrac{A}{2}, \\ B_1 = \dfrac{C+A}{2} = 90^\circ - \dfrac{B}{2}, \\ C_1 = \dfrac{A+B}{2} = 90^\circ - \dfrac{C}{2}. \end{cases}$$

Calculons S_1 :

$$S_1 = \frac{1}{2} b_1 c_1 \sin A_1;$$

or

$$b_1 = 2R \sin B_1, \quad c_1 = 2R \sin C_1,$$

donc

$$S_1 = 2R^2 \sin A_1 \sin B_1 \sin C_1,$$

ou, d'après les égalités (1),

$$S_1 = 2R^2 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}.$$

Calculons maintenant S :

$$S = pr,$$

mais

$$p = 4R \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}.$$

En remplaçant, il vient

$$S = 4Rr \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2};$$

par suite,

$$\frac{S}{S_1} = \frac{R}{2r} = \frac{R}{d}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2° Évaluons les angles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des différents triangles.

On a

$$A_1 = 90^\circ - \frac{A}{2},$$

$$A_2 = 90^\circ - \frac{A_1}{2} = 90^\circ - \frac{90^\circ}{2} + \frac{A}{2^2},$$

$$A_3 = 90^\circ - \frac{A_2}{2} = 90^\circ - \frac{90^\circ}{2} + \frac{90^\circ}{2^2} - \frac{A}{2^3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$A_n = 90^\circ - \frac{A_{n-1}}{2} = 90^\circ - \frac{90^\circ}{2} + \frac{90^\circ}{2^2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{90^\circ}{2^{n-1}} + (-1)^n\frac{A}{2^n}.$$

Lorsque n devient très grand, $\frac{1}{2^n}$ tend vers o et A_n tend vers

$$90^\circ\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots\right) - \frac{90^\circ}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,90^\circ\,\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 60^\circ.$$

On voit ainsi que la limite de A_n est 60°. On trouverait de même que les limites de B_n et C_n sont 60°. Le triangle $A_nB_nC_n$ tend donc à être équilatéral.

Maintenant O étant le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, on a

$$AOA_1 = 2C + A = 180^\circ - (B - C),$$

$$A_1OA_2 = 180^\circ - (B_1 - C_1) = 180^\circ + \frac{B - C}{2};$$

par suite

$$AOA_2 = \frac{B - C}{2}.$$

De même,

$$A_2OA_4 = 360^\circ - (A_2OA_3 + A_3OA_4) = \frac{B - C}{2^2},$$

$$A_4OA_6 = \frac{B - C}{2^3}, \quad \dots.$$

Les arcs $AA_2, A_2A_4, \ldots$ forment donc les termes d'une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{4}$. Aucun des arcs AA_2, A_2A_4, ..., $A_{2m-1}A_{2m}$ n'empiétant l'un sur l'autre, la somme de ces arcs représente la distance AA_{2m}. A la limite, on aura

$$A\alpha = \frac{4}{3}AA_2.$$

On connaît donc la position limite vers laquelle tendent les triangles d'ordre pair.

On trouverait de même que les triangles d'ordre impair ont une position limite $\alpha'\beta'\gamma'$, telle que

$$A\alpha' = \pi + \frac{4}{3}AA_2.$$

Les triangles formés tendent donc vers deux triangles équilatéraux ayant leurs sommets *symétriques par rapport* au centre du cercle.

3° Si l'on prend pour unité le rayon R, on aura

$$d = \frac{S}{S_1}, \quad d_1 = \frac{S_1}{S_2}, \quad \ldots, \quad d_n = \frac{S_n}{S_{n+1}}.$$

Multipliant membre à membre, il vient

$$dd_1\ldots d_n = \frac{S}{S_{n+1}}.$$

Si n augmente indéfiniment, la limite de S_{n+1} est $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Donc le produit $dd_1\ldots d_n$ tend vers une limite $\frac{4S}{3\sqrt{3}}$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lacombe et G. Barran.

———

RHÉTORIQUE;

PAR M. P. GIAT,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Lucas).

Un tronc de cône est tel que sa hauteur est moyenne proportionnelle entre les diamètres de ses deux bases. On propose : 1° de démontrer qu'on peut inscrire une sphère dans ce tronc de cône; 2° la hauteur h étant donnée, de déterminer les rayons des deux bases, de manière que la surface totale du tronc de cône soit équivalente à un cercle de rayon a. Discussion.

1° Tout revient à démontrer que l'apothème du tronc est égal à $R + r$; car alors le trapèze obtenu en coupant le tronc par un plan passant par l'axe sera tel que la somme des côtés non parallèles soit égale à la somme des bases, c'est-à-dire sera circonscriptible.

Or, d'après l'énoncé,

$$(1) \qquad 4Rr = h^2.$$

Maintenant

$$a^2 = h^2 + (R - r)^2 = h^2 + (R + r)^2 - 4Rr = (R + r)^2,$$

d'où

$$a = R + r. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2° La surface totale du tronc est égale à

$$\pi(R + r)(R + r) + \pi(R^2 + r^2) = \pi a^2.$$

On a donc

$$(R + r)^2 + R^2 + r^2 = a^2,$$

ou

$$2(R + r)^2 = a^2 + \frac{h^2}{2},$$

en remarquant que

$$R^2 + r^2 = (R + r)^2 - 2Rr = (R + r)^2 - \frac{h^2}{2};$$

d'où

$$(2) \qquad R + r = \frac{\sqrt{2a^2 + h^2}}{2}.$$

Les équations (1) et (2) donnent le produit et la somme des quantités R et r; ces quantités sont donc les racines de l'équation

$$X^2 - \frac{\sqrt{2a^2 + h^2}}{2} X + \frac{h^2}{4} = 0.$$

Discussion. — Pour que ces racines soient réelles, il faut que

$$\frac{2a^2 + h^2}{4} - h^2 \geq 0,$$

d'où

$$a^2 \geq \frac{3h^2}{2}.$$

Le produit des racines étant positif, les deux racines sont de même signe; leur somme étant positive, elles sont positives.

Dans le cas où $a^2 = \frac{3h^2}{2}$, la surface totale est minimum, $R = r$, et le tronc de cône devient un cylindre.

Remarque. — Le volume du tronc est égal au produit de sa surface totale par le $\frac{1}{6}$ de sa hauteur : on le démontrerait sans difficulté.

SECONDE;

PAR M. ÉMILE BÉNÉZECH,
Élève du Prytanée militaire.

Soit un carré ABCD; *par deux sommets opposés* A *et* C *de ce carré, on mène, d'un même côté par rap-*

port au plan du carré, les droites AK, CL *perpendiculaires à ce plan. On prend sur* AK *un point* A′ *dont la distance au centre du carré est égale au côté du carré et, sur* CL, *un point* C′ *dont la distance au point* A′ *est égale au double du côté du carré.*

1° *Démontrer que la droite* A′C′ *est perpendiculaire au plan* BDA′;

2° *Former, en appelant* a *le côté du carré, l'expression du volume de chacun des tétraèdres* A′ABD, C′CBD, C′A′BD.

Soit O le point d'intersection des deux diagonales AC et BD.

Pour démontrer que la droite C′A′ est perpendiculaire au plan BDA′, il suffit de constater qu'elle est perpendiculaire aux deux droites OA′, DA′ qui passent par son pied dans le plan. Or on a

$$AA' = \frac{a}{\sqrt{2}};$$

puis, menant A′E parallèle à AC, on a

$$C'E = a\sqrt{2},$$

et, par suite,

$$CC' = \frac{3a}{\sqrt{2}};$$

donc

$$\overline{C'O}^2 = \frac{9a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 5a^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{C'A'}^2,$$

ce qui prouve que C′A′ est perpendiculaire sur OA′.

On a encore

$$\overline{C'D}^2 = \frac{9a^2}{2} + a^2 = \frac{11a^2}{2}, \quad \overline{DA'}^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2},$$

donc

$$\overline{C'D}^2 - \overline{DA'}^2 = \frac{11a^2}{2} - \frac{3a^2}{2} = 4a^2 = \overline{C'A'}^2.$$

La proposition est par conséquent démontrée.

Les valeurs précédentes de AA′, CC′ permettent de calculer sur-le-champ les volumes des tétraèdres dont il s'agit dans l'énoncé, et l'on a

$$\text{vol. AA'BD} = \frac{a^2}{2}\,\frac{a}{3\sqrt{2}} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}},$$

$$\text{vol. C'CBD} = \frac{a^2}{2}\,\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{vol. C'A'BD} = \frac{a^2}{\sqrt{2}}\,\frac{2a}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Note. — La même question a été résolue par M. Léopold Maison, élève du Prytanée militaire.

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN 1884.

COMPOSITIONS D'ADMISSIBILITÉ.

Mathématiques spéciales.

On donne une ellipse et une hyperbole situées respectivement dans deux plans rectangulaires P et Q, et pour chacune desquelles la droite d'intersection de ces deux plans est axe de symétrie :

1° On considère tous les plans R tangents à la fois à l'ellipse et à l'hyperbole, et l'on propose de démontrer qu'il existe une infinité de surfaces du second ordre S tangentes à la fois à tous les plans R.

2° Trouver le lieu des centres des surfaces S et déterminer la nature de chacune de ces surfaces suivant la position occupée par son centre.

3° Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les surfaces S soient homofocales.

Mathématiques élémentaires.

Trouver les angles d'un quadrilatère circonscrit à un cercle de rayon r, connaissant trois côtés consécutifs a, b, c du quadrilatère. Entre quelles limites doit varier r pour que le problème soit possible, les côtés a, b, c restant constants? On distinguera deux cas, celui où les points de contact des côtés du quadrilatère avec la circonférence sont situés sur les côtés eux-mêmes, et celui où ces points de contact sont sur les prolongements des côtés.

Composition sur certaines parties, désignées à l'avance, du programme de la licence ès sciences mathématiques.

Théorie. — Dire ce que l'on entend par intégrale complète, intégrale générale, intégrale particulière, intégrale singulière, d'une équation entre n variables indépendantes, une fonction inconnue z de ces variables et les dérivées partielles du premier ordre de z par rapport aux mêmes variables.

Montrer comment la connaissance d'une intégrale complète peut conduire à l'intégrale générale.

Étant donnée une équation de la forme considérée, non *linéaire*, exposer une des méthodes d'intégration qui lui sont applicables : le choix de la méthode est laissé à chaque candidat.

Application. — Intégrer l'équation

$$m^2(1+p^2+q^2)-m(x-y)(p-q)-2x=0,$$

dans laquelle on désigne par m une longueur donnée, par p et q les dérivées partielles de z par rapport à x et par rapport à y.

COMPOSITIONS FINALES.

Mécanique.

On donne un hélicoïde représenté, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$z = m \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x};$$

un point matériel non pesant, assujetti à rester sur la surface parfaitement polie de l'hélicoïde, est attiré vers l'axe Oz par une force dirigée suivant la perpendiculaire abaissée du point sur l'axe, et inversement proportionnelle au cube de cette perpendiculaire. Déterminer, dans le cas général, la loi du mouvement du point considéré, la pression sur l'hélicoïde, et les diverses formes que peut affecter la trajectoire. Examiner les cas particuliers où la projection de la trajectoire sur le plan xOy peut être représentée par une équation où n'entrent que des fonctions algébriques, logarithmiques, exponentielles ou circulaires.

Calcul.

Si l'on désigne par a le demi-grand axe d'une ellipse, par e son excentricité, par $2s$ la longueur de l'arc de cette courbe compris dans l'angle obtus formé par les deux demi-diamètres conjugués égaux, on démontre que le rapport $\frac{s}{a}$ est exprimé par la série suivante

$$\frac{s}{a} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi - 2}{16} e^2 - \frac{2\pi - 8}{256} e^4 - \frac{15\pi - 44}{3072} e^6 - \frac{25(21\pi - 64)}{196608} e^8 - \ldots,$$

π étant le rapport de la circonférence au diamètre. On

donne $\frac{s}{a} = 0,78$, et l'on demande de calculer, par la méthode des approximations successives, la valeur de e avec l'approximation que comportent les Tables de logarithmes à 7 décimales.

Épure.

On donne un tétraèdre régulier SABC, et l'on propose de construire l'intersection de deux cônes définis de la façon suivante : le premier a pour sommet S et pour base le cercle inscrit dans ABC; le second a pour sommet C et pour base le cercle inscrit dans SAB.

L'arête du tétraèdre a $0^m,17$; la face ABC est située dans le plan horizontal; AB est parallèle à la ligne de terre et située à $0^m,02$ au-dessous de cette ligne.

Pour distinguer les parties visibles et les parties invisibles, on regardera les deux cônes comme opaques et limités aux parties intérieures du tétraèdre. Le tétraèdre est transparent.

SUJETS DE LEÇONS.

Ces sujets diffèrent très peu de ceux qui ont été traités en 1881, 1882 et 1883.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1884 (1).

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

Soient les deux paraboles données

$$y^2 - 2p_1 x + 6x - 1 = 0,$$
$$y^2 - 2p_2 x - 4x + 3 = 0.$$

(1) Questions données à plusieurs élèves qui n'ont pu composer que plus tard.

On demande :

1° De trouver les relations du second degré en u et v

$$f_1(u, v) = 0, \quad f_2(u, v) = 0,$$

qui expriment que la droite

$$ux + vy + 1 = 0$$

est tangente soit à l'une, soit à l'autre de ces courbes ;

2° De trouver les racines de l'équation du troisième degré en μ qui exprime que la combinaison linéaire

$$f_1 + \mu f_2 = 0$$

se décompose en deux facteurs linéaires en u et v;

3° Démontrer que, l'une de ces racines fournissant une décomposition de la forme

$$u(\alpha u + \beta v + \gamma) = 0,$$

α, β, γ sont les coordonnées homogènes du point de rencontre P des deux tangentes communes à distance finie des deux paraboles.

COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Représenter, par ses projections, un cylindre plein, de révolution, que limite la surface d'un hyperboloïde de révolution à une nappe.

L'axe du cylindre est mené parallèlement à la ligne de terre à $0^m,06$ au-dessus du plan horizontal, et à la même distance en avant du plan vertical. Le rayon est de $0^m,05$. Le centre de l'hyperboloïde se trouve sur la génératrice inférieure du cylindre.

L'axe est vertical, le cercle de gorge a $0^m,05$ de rayon. Les génératrices font avec l'axe un angle de 45°.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (CONCOURS DE 1884).

Mathématiques.

a et b désignant les coordonnées rectilignes rectangulaires d'un point M, quelle est, pour chaque position de ce point, la nature des racines de l'équation

$$3t^4 + 8at^3 - 12bt^2 + 4b = 0?$$

On construira, en particulier, le lieu des positions du point M pour lesquelles l'équation admet une racine double, en calculant les coordonnées d'un point du lieu en fonction de cette racine.

Physique.

1. Un fil métallique est tendu par un barreau de cuivre horizontal que l'on fait osciller, et la durée de l'oscillation est θ. Le fil est en équilibre quand le barreau est perpendiculaire au méridien magnétique; on remplace le barreau de cuivre par un barreau aimanté qui se met alors dans une position faisant un angle α avec la première. On fait osciller le barreau aimanté autour de cette position d'équilibre, et l'on trouve que la durée de l'oscillation est t. Quelle est l'équation qui lie les trois variables θ, t et α?

2. Une lunette, dont l'objectif a une longueur focale égale à f, est pourvue d'un oculaire négatif à deux verres, dont le symbole est 1, 2, 3, c'est-à-dire que le verre oculaire, celui qui est tourné vers l'œil, a un foyer f, le verre de champ, celui qui est tourné vers l'objectif, a un foyer $3f$, et la distance des verres est

égale à $2f$. La lunette est réglée pour un objet infiniment éloigné et pour un œil infiniment presbyte. On demande : 1° la mise au point, c'est-à-dire la distance de la lentille de champ par rapport au plan focal de l'objectif; 2° le grossissement; 3° la position du cercle de Ramsden, ou sa distance à la lentille oculaire; 4° la grandeur de ce cercle, ou le rapport de son diamètre à celui de l'objectif.

3. Que savez-vous sur les grandeurs électriques et sur les unités qui servent à les mesurer?

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE.

PREMIÈRE SESSION, JUILLET 1884.

Géométrie analytique.

On donne l'équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0$$

d'une hyperbole rapportée à son centre et à ses axes, et l'équation

$$y - kx = 0$$

d'une droite menée par le centre de cette hyperbole :

1° Former l'équation générale des coniques qui passent par les points réels ou imaginaires communs à l'hyperbole et à la droite données, et qui, de plus, sont tangents à l'hyperbole en celui des sommets de cette hyperbole qui est située sur la partie positive de l'axe des x. Discuter cette équation générale et reconnaître la nature des coniques qu'elle peut représenter.

2° Trouver le lieu des centres des coniques représen-

tées par l'équation générale précédente. Ce lieu est une conique Δ. Chercher un nombre de points et de tangentes suffisant pour déterminer géométriquement cette conique Δ.

3° Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées à la conique Δ parallèlement à la droite de coefficient angulaire $\frac{b}{a}$, quand on fait varier k. On vérifiera que l'équation de ce dernier lieu, qui est du troisième degré, représente trois droites.

Calcul trigonométrique.

On donne deux côtés d'un triangle et l'angle compris :

$$a = 2317^{\text{m}},455,$$
$$b = 8423^{\text{m}},761,$$
$$C = 122^\circ 47' 35'',1.$$

On demande de calculer les trois autres éléments A, B, c du triangle, et sa surface.

Géométrie descriptive.

Une droite de front $(s\theta, s'\theta')$, dont l'éloignement est égal à $0^{\text{m}},80$ et dont la trace horizontale θ se trouve à $0^{\text{m}},05$ de la proposition horizontale s de son point de rencontre (s, s') avec le plan bissecteur du premier dièdre, engendre, par sa rotation autour de la verticale du point (s, s'), un *premier cône* de révolution.

Un second cône a pour sommet le milieu (σ, σ') de la droite $(s\theta, s'\theta')$; sa trace horizontale est un cercle, dont le centre c se trouve en avant de la droite $s\theta$, dont le rayon est égal à la longueur de cette droite, et qui passe par les extrémités s et θ de cette même droite.

On demande de construire les projections de la partie, supposée solide et opaque, des deux nappes du *premier cône*, qui, placée à l'intérieur des deux nappes du second

cône et derrière le plan de front F, dont l'éloignement est $0^m,14$, se trouve comprise entre le plan horizontal de projection et un plan horizontal P′ à la cote $0^m,215$.

On indiquera à l'encre rouge les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, et celles des points et des droites remarquables. Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Titre extérieur. — Géométrie descriptive.

Titre intérieur. — Intersection de deux cônes.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,18$ du petit côté inférieur, et le point (s, s') au milieu de la feuille.

Physique.

1° Un espace V contient un mélange d'air et de vapeur d'eau à une température t, et sous la pression totale H. La vapeur n'est pas saturée et possède une tension f. On demande de calculer la pression totale x du mélange, si l'on ramène la température à être t', en distinguant le cas où il y a condensation, et le cas où ce phénomène ne se produit pas. On désignera par F′ la tension maximum de la vapeur d'eau à la température t'.

2° Un récipient fermé, de capacité invariable et égale à 1^{mc}, contient de l'air humide dont la température est 23°, et à l'état hygrométrique 0,75. La température descend à 5° dans cet espace. Quel sera le poids de la vapeur liquéfiée?

Tension maximum de la vapeur à 23°...	$20^{mm},888$
Tension maximum de la vapeur à 5°...	$6^{mm},534$
Densité de la vapeur d'eau	0,622
Poids du litre d'air à 0° et à 760^{mm}.....	$1^{gr},293$
Coefficient de dilatation des gaz	0,003665

Chimie.

1° Indiquer les différents cas dans lesquels l'ammoniaque et les composés ammoniacaux prennent naissance.

2° On donne 100^{lit}, mesurés à 0° et sous la pression 760^{mm}, de gaz oxyde de carbone. On demande : 1° quel volume d'oxygène, à 0° et sous la pression 760^{mm}, il faut employer pour en produire la combustion complète; 2° quel est, dans les mêmes conditions, le volume de gaz acide carbonique produit. On demande de résoudre le problème par la méthode des équivalents en poids et par celle des équivalents en volumes.

	Équivalents		
	en poids.	en volumes.	Poids du litre.
CO..........	14	2	$1^{gr},254$
O...........	8	1	1,43
CO^2........	22	2	1,9774

SECONDE SESSION, OCTOBRE 1884.

Géométrie analytique.

On donne, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy et une droite quelconque coupant ces axes respectivement aux points A et B.

On prend sur cette droite un point m dont les coordonnées sont α et β et l'on construit, dans le plan, un point correspondant M, ayant pour coordonnées

$$x = \frac{f^2}{\alpha}, \quad y = \frac{g^2}{\beta},$$

f et g étant deux longueurs constantes données.

Cela posé :

1° On demande d'écrire l'équation du lieu des points M, lorsque le point m se déplace sur la droite indéfinie AB. Ce lieu est une hyperbole qu'on désignera, dans ce qui va suivre, par la lettre H.

2° On demande de déterminer les éléments nécessaires à la définition complète de cette hyperbole H et d'en construire géométriquement un point quelconque, ainsi que la tangente en ce point.

3° On suppose que la droite AB se déplace dans le plan, de façon telle que la somme des inverses de ses coordonnées à l'origine reste constante, soit de façon que

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{l} = \text{const.}$$

A chaque position de la droite répondra une hyperbole H.

On demande de montrer que toutes ces hyperboles ont une corde commune et de trouver le lieu des pôles de cette corde relativement aux diverses hyperboles (c'est-à-dire le lieu des points pour lesquels elle est corde de contact des tangentes menées de ce point à l'une des hyperboles).

4° On projette le centre C de l'hyperbole H répondant à la droite AB, sur cette droite, en D; et l'on demande de trouver le lieu des points D lorsque la droite AB se déplace, non plus selon la loi ci-dessus définie, mais en restant parallèle à elle-même.

Calcul trigonométrique.

Calculer les angles et la surface d'un triangle dont les trois côtés sont

$$a = 4356^{m},742,$$
$$b = 3754,682,$$
$$c = 2574,754.$$

Géométrie descriptive.

Intersection d'un cône de révolution et d'un cylindre. — Dans un plan horizontal P′, à la cote $0^m,042$, on trace deux cercles : le premier ω, ω' est la directrice du cône, il a $0^m,050$ de rayon et son centre O, O' se trouve à $0^m,064$ en avant du plan vertical ; le second ω_1, ω'_1 est la directrice du cylindre, il passe par le centre O, O', par le point v, v' le plus voisin du plan vertical et par le point le plus à droite d, d' du premier cercle. Le sommet s, s' du cône a pour cote $0^m,075$, et les génératrices du cylindre sont parallèles à la droite $sd, s'd'$.

On demande de construire les projections du corps constitué par la partie des deux nappes du cône, supposées pleines et opaques, placée à l'intérieur du cylindre et comprise entre un plan horizontal Q′, ayant une cote de $0^m,145$ et le plan horizontal de projection.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, et celles des points et des droites remarquables.

Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Titre extérieur. — Géométrie descriptive.

Titre intérieur. — Intersection d'un cône et d'un cylindre.

Placer la ligne de terre parallèlement aux grands côtés du cadre à $0^m,115$ du grand côté inférieur, et la droite ss' au milieu de la feuille.

Physique.

On donne une masse d'air humide dont le volume est de 1^{mc}, l'état hygrométrique $\frac{1}{4}$, la pression totale de 760^{mm} de mercure, et la température 25° C.

On demande quel est le poids maximum d'eau qui pourra se réduire en vapeur dans cette masse d'air, si l'on maintient la pression totale constante égale à 760^{mm} de mercure, et si l'on porte la température à 35° C., aussi bien pour l'air que pour l'eau qui s'évapore.

On donne les forces élastiques maxima de la vapeur d'eau :

A 25°	$23^{mm},09$
A 35°	$40^{mm},40$

On donne :

Le coefficient de dilatation des gaz	0,00367
Le poids de 1^{lit} d'air sec à 0° C. et 760^{mm}.	$1^{gr},293$
La densité de la vapeur d'eau	0,6235

Chimie.

I. Préparation du brome et de l'iode.

II. On fait passer dans l'eudiomètre 200^{cc} de protoxyde d'azote et 300^{cc} d'hydrogène. Après le passage de l'étincelle, il reste 300^{cc} de gaz. On ajoute 100^{cc} d'oxygène et l'on fait passer de nouveau l'étincelle ; on obtient un résidu de 250^{cc}.

Déduire de ces données la composition en volume du protoxyde d'azote.

ÉCOLE FORESTIÈRE (CONCOURS DE 1884).

Mathématiques.

1. Étant données deux droites non situées dans le même plan, déterminer le lieu géométrique des milieux de toutes les droites qui joignent un point de la première

droite à un point de la seconde. Indiquer la marche à suivre pour représenter ce lieu à l'aide des procédés de la Géométrie descriptive.

2. Trouver, par la suppression des facteurs communs, c'est-à-dire sans employer le procédé de la division directe, le quotient de l'expression

$$\frac{a^9 - ax^8 + a^8x - a^9}{a^5 - ax^4 + a^4x - x^5 + \sqrt{2}(a^4x - a^2x^3 + a^3x^2 - ax^4)}.$$

3. L'escompte d'un billet de 2460^{fr} est $67^{fr},65$. Si l'échéance était rapprochée de 55 jours et le taux augmenté de 1,5 pour 100, l'escompte resterait le même. Trouver le taux et l'échéance.

Trigonométrie et calcul logarithmique.

1. On donne, dans un quadrilatère inscriptible ABCD,

$$B = 87°38'47'', \quad a = 713^m,68576, \quad b = 557^m,34875;$$
$$d - c = 50^m,355,$$

calculer d, c, A, R et S.

2. Variations de

$$\frac{(1+\sin x)^2}{\sin x(1-\sin x)}.$$

3. Un paratonnerre AB, d'une longueur égale à $8^m,264$, est placé sur un édifice de hauteur AE. En s'arrêtant à $82^m,656$ du pied de l'édifice et à une hauteur de $15^m,467$, au-dessus du sol, on a vu le paratonnerre sous un angle de $4°27'54'',27$. On demande de calculer la hauteur de la pointe B du paratonnerre au-dessus du sol.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (CONCOURS DE 1884).

Composition de Mathématiques.

1. On donne un angle aigu ZOX et un point A sur OX; d'un point M pris sur OX, entre O et A, on abaisse la perpendiculaire MP sur OZ, et l'on considère la longueur y donnée par la formule

$$y = \sqrt{OM.MA + 2\overline{MP}^2}.$$

On demande comment y varie quand le point M se déplace sur OX de O jusqu'à A. Courbe figurative.

2. Dans un triangle isoscèle ABC, on connaît la base a, la bissectrice β de l'angle à la base B; calculer l'angle $\frac{B}{2}$. Discuter; rendre calculable par logarithmes la formule obtenue.

3. Connaissant dans un triangle ABC le côté a et les angles B et C, calculer la hauteur abaissée sur le côté a. Données numériques :

$$a = 13908^m,5,\quad B = 56^\circ 15' 47'',5,\quad C = 39^\circ 16' 52''.$$

Épure.

On donne, dans le plan vertical de projection, un cercle tangent à xy, dont le rayon égale 31^{mm}. Le pentagone régulier inscrit dans ce cercle, et dont un sommet A

est sur xy, est la base d'un prisme droit. Un cône droit, dont le sommet est situé dans le plan de profil du point A, à 84^{mm} au-dessus du plan horizontal et à 69^{mm} en avant du plan vertical, a pour base, sur le plan horizontal, un cercle dont le rayon est de 60^{mm}. On demande l'intersection du cône et du prisme. On indiquera le tracé des constructions effectuées pour trouver un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.

Dans la mise à l'encre, on représentera la portion du prisme qui est contenue dans le cône.

NOTE SUR LE DÉVELOPPEMENT D'UN DÉTERMINANT;

PAR M. E. HUMBERT,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nancy.

Je me propose d'exposer dans cette Note une méthode très simple pour obtenir le développement d'un déterminant à l'aide des mineurs relatifs à K lignes quelconques. Cette méthode n'est pas nouvelle; je crois seulement l'avoir exposée très simplement.

Je désignerai par Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_n^1 & A_n^2 & A_n^n \end{vmatrix},$$

et par $\Delta_{\alpha\beta\ldots\lambda}^{\alpha'\beta'\ldots\lambda'}$ le déterminant mineur formé avec les éléments des lignes horizontales (lignes) d'indices $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ et ceux des lignes verticales (colonnes) d'indices α', $\beta', \ldots, \lambda'$, en nombre égal aux précédents.

Je suppose qu'on veuille développer Δ en mettant en évidence les déterminants mineurs formés avec les éléments des K lignes dont les indices sont $a, b, \ldots, l$, que je suppose rangés par ordre de grandeur. J'appelle a', $b', \ldots, m'$ les indices des lignes qui restent, rangés aussi par ordre de grandeur.

Un terme quelconque de Δ est alors

$$(-1)^N A_a^\alpha A_b^\beta \ldots A_l^\lambda A_{a'}^{\alpha'} A_{b'}^{\beta'} \ldots A_{m'}^{\mu'},$$

N désignant le nombre total des inversions formées par les indices supérieurs entre eux et les indices inférieurs entre eux.

Comptons d'abord le nombre des inversions formées par les indices inférieurs; $a, b, \ldots, l$ entre eux ne forment pas d'inversions; de même pour $a', b', \ldots, l'$. Mais il y a $a-1$ nombres inférieurs à a et placés après lui; $b-2$ nombres inférieurs à b et placés après lui; $l-K$ nombres inférieurs à l et placés après lui; donc il y a

$$a+b+\ldots+l-1-2-\ldots-K$$

ou

$$a+b+\ldots+l-\frac{K(K+1)}{2},$$

inversions formées par les indices inférieurs.

Maintenant, comptons le nombre des inversions formées par les indices supérieurs. Il y a d'abord P inversions formées par les indices $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ entre eux; Q inversions formées par les indices $\alpha', \beta', \ldots, \mu'$ entre eux. Il n'y a plus qu'à compter les inversions formées par les indices $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ avec les indices $\alpha', \beta', \ldots, \lambda', \mu'$. Pour cela, on peut ranger les indices $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ par ordre de grandeur $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$. Alors il y a α_1-1 nombres inférieurs à α_1 et placés après lui; β_1-2 nombres inférieurs à β_1 et placés après lui; λ_1-K nom-

bres inférieurs à λ_1 et placés après lui. Donc le nombre total des inversions formées par les indices supérieurs est

$$P + Q + \alpha + \beta + \ldots + \lambda - \frac{K(K+1)}{2},$$

en remarquant que

$$\alpha_1 + \beta_1 + \ldots + \lambda_1 = \alpha + \beta + \ldots + \lambda,$$

et l'on a

$$N = a + b + \ldots + l + \alpha + \beta + \ldots + \lambda + P + Q - K(K+1).$$

Le terme général de Δ peut alors s'écrire

$$(-1)^{a+b+\ldots+l+\alpha+\beta+\ldots+\lambda}(-1)^P A_a^\alpha A_b^\beta \ldots A_l^\lambda (-1)^Q A_{a'}^{\alpha'} A_{b'}^{\beta'} \ldots A_{m'}^{\mu'},$$

car $K(K+1)$ est un nombre pair et peut être enlevé de l'exposant de -1.

Si l'on échange entre eux d'une manière quelconque les indices $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ et aussi les indices $\alpha', \beta', \ldots, \mu'$, on obtient tous les termes du produit

$$(-1)^{a+b+\ldots+l+\alpha+\beta+\ldots+\lambda}\Delta_{ab\ldots l}^{\alpha\beta\ldots\lambda}\Delta_{a'b'\ldots m'}^{\alpha'\beta'\ldots\mu'};$$

et, enfin, en posant pour $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, K nombres quelconques parmi les n nombres $1, 2, \ldots, n$, et de toutes les manières possibles, on a

$$\Delta = (-1)^{a+b+\ldots+l}\Sigma(-1)^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda}\Delta_{ab\ldots l}^{\alpha\beta\ldots\lambda}\Delta_{a'b'\ldots m'}^{\alpha'\beta'\ldots\mu'}.$$

C'est le développement annoncé.

Si l'on voulait mettre en évidence les mineurs formés avec les éléments des K colonnes d'indices $a, b, \ldots, l$, on raisonnerait d'une façon toute semblable et l'on arriverait à

$$\Delta = (-1)^{a+b+\ldots+l}\Sigma(-1)^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda}\Delta_{\alpha\beta\ldots\lambda}^{ab\ldots l}\Delta_{\alpha'\beta'\ldots\mu'}^{a'b'\ldots m'}.$$

Première application. — Si l'on développe le déterminant

$$C = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n & p_1^1 & p_1^2 & \dots & p_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n & p_2^1 & p_2^2 & \dots & p_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n & p_n^1 & p_n^2 & \dots & p_n^n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_n^1 & b_n^2 & \dots & b_n^n \end{vmatrix},$$

en se servant des mineurs des n premières colonnes, on trouve immédiatement

$$C = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n^1 & b_n^2 & \dots & b_n^n \end{vmatrix}.$$

L'exposant de -1 est

$$1 + 2 + \dots + n + 1 + 2 + \dots + n,$$

c'est-à-dire un nombre pair.

Si l'on développe de la même manière le déterminant

$$C' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_n^1 & b_n^2 & \dots & b_n^n \\ a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n & p_1^1 & p_1^2 & \dots & p_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n & p_2^1 & p_2^2 & \dots & p_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n & p_n^1 & p_n^2 & \dots & p_n^n \end{vmatrix},$$

on trouve

$$C' = (-1)^n \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n^1 & b_n^2 & \dots & b_n^n \end{vmatrix}.$$

L'exposant de -1 est ici

$$n+1+n+2+\ldots+n+n+1+2+\ldots+n;$$

en enlevant un nombre pair $2(1+2+\ldots+n)$, il se réduit à n^2, qui est de la même parité que n.

Seconde application. — Considérons les matrices

$$\left\|\begin{array}{cccc} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_p^1 & a_p^2 & \ldots & a_p^n \end{array}\right\|, \quad \left\|\begin{array}{cccc} b_1^1 & b_1^2 & \ldots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \ldots & b_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_p^1 & b_p^2 & \ldots & b_p^n \end{array}\right\|,$$

et le déterminant

$$C = \left|\begin{array}{cccccccc} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_p^1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_p^2 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & \ldots & . \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_p^n & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_1^1 & b_1^2 & \ldots & b_1^n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_2^1 & b_2^2 & \ldots & b_2^n \\ . & . & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_p^1 & b_p^2 & \ldots & b_p^n \end{array}\right|.$$

Développons-le en mettant en évidence les mineurs des p premières colonnes. Pour cela, prenons p lignes parmi les n premières, et soient $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ leurs indices, on aura

$$C = (-1)^{1+2+\ldots+p}\Sigma(-1)^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda}A_{\alpha\beta\ldots\lambda}$$

$$\times \left|\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . & \ldots & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & -1 & 0 \\ b_1^1 & b_1^2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & b_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_p^1 & b_p^2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & b_p^n \end{array}\right|,$$

$A_{\alpha\beta\ldots\lambda}$ désignant le déterminant d'ordre p formé avec les p colonnes d'indices $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ dans la matrice A.

Dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . & \dots & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & . & 0 & -1 & 0 \\ b_1^1 & b_1^2 & \dots & . & \dots & \dots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \dots & . & \dots & \dots & b_2^n \\ .. & .. & \dots & . & \dots & \dots & .. \\ b_p^1 & b_p^2 & \dots & . & \dots & \dots & b_p^n \end{vmatrix},$$

il y a $n-p$ lignes, les premières, qui ne contiennent pas les éléments b, et ce sont celles qu'on obtient en supprimant dans les n colonnes de droite du déterminant C les lignes d'indices $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$; donc, dans chacune d'elles, -1 est situé dans une colonne d'indice autre que $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$. Si donc on développe ce dernier déterminant en mettant en évidence le mineur des $n-p$ premières lignes, qui n'est pas nul, et qui est égal à $(-1)^{n-p}$, puisque les seuls termes différents de zéro sont les termes situés sur la diagonale principale et égaux à -1, on trouve pour ce déterminant

$$(-1)^{1+2+\ldots+n-p+1+2+\ldots+n-\alpha-\beta-\ldots-\lambda+n-p} B_{\alpha\beta\ldots\lambda}.$$

Donc, finalement, on a

$$C = (-1)^{n(n+p)} \Sigma A_{\alpha\beta\ldots\lambda} B_{\alpha\beta\ldots\lambda}.$$

Remarque. — Si p est plus grand que n, chacun des déterminants $A_{\alpha\beta\ldots\lambda}$, $B_{\alpha\beta\ldots\lambda}$ contient une ligne de zéros et est identiquement nul; C est donc nul.

Les deux applications que nous venons d'indiquer conduisent, comme on sait, facilement aux théorèmes relatifs à la multiplication des déterminants et à la multiplication des matrices.

SUR LA SÉRIE HARMONIQUE;

PAR M. E. CESARO.

1. Désignons par H_n la somme des n premiers termes de la série harmonique. Si l'on pose

$$u_{n-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{n^5} + \frac{1}{7}\frac{1}{n^7} + \ldots,$$

on a, d'après une formule connue,

$$l\frac{n+1}{n-1} = \frac{2}{n} + 2u_{n-1}.$$

Si, dans cette formule, on change n en $n-1$, $n-2$, ..., 3, 2, on obtient, par addition,

$$l\frac{n(n+1)}{2} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + 2(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1})$$

ou bien

$$l\frac{n(n+1)}{2} = 2H_n - 2 + 2S_{n-1};$$

d'où

(1)
$$H_n = l\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} + 1 - S_{n-1}.$$

2. Pour calculer S_{n-1}, étudions la série $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}$. On a

$$u_{n-1} < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^7} + \ldots\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n}\right).$$

On obtient, par addition,

$$S_{n-1} < \frac{1}{12} - \frac{1}{6n(n+1)}.$$

Donc S_{n-1} tend vers une limite S, inférieure à $\frac{1}{12}$. Les termes étant positifs, on a

$$(2) \qquad S_{n-1} < S.$$

D'autre part, on trouve de la même façon

$$S - S_{n-1} = u_n + u_{n+1} + \ldots < \frac{1}{6n(n+1)};$$

d'où

$$(3) \qquad S_{n-1} > S - \frac{1}{6n(n+1)}.$$

Des inégalités (2) et (3), il résulte qu'on peut poser

$$S_{n-1} = S - \frac{\theta}{6n(n+1)},$$

θ étant compris entre 0 et 1.

3. Si, dans (1), on remplace S_{n-1} par sa valeur, on obtient

$$H_n = l\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} + 1 - S + \frac{\theta}{6n(n+1)}$$

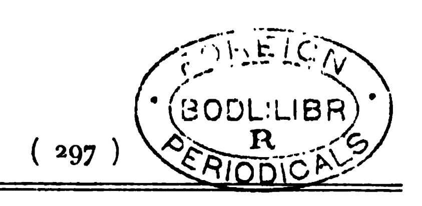
ou bien

$$(4) \qquad H_n = C + l\sqrt{n(n+1)} + \frac{\theta}{6n(n+1)}.$$

C est une constante. Cette constante, qui porte le nom de *constante d'Euler*, est égale à 0,5772156664....

Remarque. — La formule (4) donne H_n avec une erreur moindre que $\frac{1}{6n^2}$. On trouve, par exemple,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1000000} = 14,39.$$



QUELQUES RÉFLEXIONS SUR L'ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES COURBES GÉOMÉTRIQUES ET THÉORÈMES POUVANT Y ÊTRE UTILES

(SUITE);

PAR M. J.-E. ESTIENNE.

RELATION ENTRE HUIT PLANS SEPTAIRES.

Une simple transformation par polaires réciproques conduit au théorème suivant, analogue à celui de Brianchon :

THÉORÈME. — *Si les huit faces d'un octogone gauche sont septaires (c'est-à-dire telles que toute quadrique tangente à sept le soit à la huitième), les quatre droites qui joignent les sommets opposés sont les génératrices d'un hyperboloïde.*

DE LA CUBIQUE GAUCHE.

Une courbe très utile dans l'étude des quadriques est la cubique gauche. On se contentera d'en rappeler brièvement les propriétés et l'on s'attachera à faire ressortir ses analogies étroites avec la conique plane.

DÉFINITION. — *La cubique gauche, ou courbe gauche du troisième ordre, est telle qu'un plan quelconque la coupe en trois points.*

Cette définition donne une première analogie entre la cubique gauche et la conique, analogie intime, quoique d'apparence puérile :

La cubique gauche est coupée par un plan en un nombre de points égal à celui qui détermine un plan.

De même, la conique est coupée par une droite, en un nombre de points égal à celui qui détermine une droite.

De la définition de la cubique gauche, on déduit successivement et sans peine les théorèmes suivants :

1° *La perspective d'une cubique gauche, quand on prend le point de vue sur cette courbe, est une conique.*

2° *Une cubique gauche est l'intersection de deux cônes du second ordre qui ont une génératrice commune, ou, plus généralement, de deux quadriques qui ont une génératrice commune.*

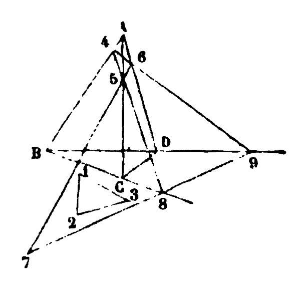
3° *Six points quelconques de l'espace déterminent une cubique gauche et une seule.*

Ce qui précède permet de trouver la relation double qui existe entre sept points d'une cubique gauche.

On va la rappeler et la démontrer :

Théorème. — *Un plan quelconque coupe les faces d'un tétraèdre* ABCD, *inscrit dans une cubique gauche,*

Fig. 8.



suivant le quadrilatère 4.5.7.9, *et la cubique en trois points* 1.2.3; *le quadrilatère* 4.5.7.9 *et le triangle* 1.2.3 *sont circonscrits à une même conique* (*fig.* 8).

En effet, de A, on voit les points B.C.D., 1.2.3., sur une conique; les triangles 4.5.6 et 1.2.3 sont donc inscrits dans une conique, et, d'après un théorème connu, leurs côtés sont aussi tangents à une conique. Une perspective faite de B montre de même que les triangles 4.8.9 et 1.2.3 sont circonscrits à une conique. Le théorème résulte dès lors de ce que les droites 4.8 et 4.9 sont respectivement les mêmes que les droites 4.5 et 4.6.

On peut considérer la cubique gauche à un autre point de vue, en remarquant que huit quelconques de ses points sont septaires, puisque toute quadrique qui coupe une cubique gauche en sept points contient cette cubique tout entière.

Si donc sept points sont sur une cubique gauche, on a la relation qui les lie, en exprimant que leur huitième point septaire est mal déterminé.

C'est ainsi que la construction faite (*fig.* 7) pour trouver le huitième point septaire ne donnerait pas un point unique si les points α, α'; β, β'; γ, γ' étaient tels qu'on pût faire passer par ces points les côtés de deux et, par suite, d'une infinité d'hexagones définis comme on l'a dit. L'heptagone A.B.C.D.E.F.G. serait alors inscrit à une cubique gauche.

On va donner entre sept points d'une cubique gauche une autre relation, analogue à une de celles qu'on peut établir entre six points d'une conique.

Le théorème plan est le suivant :

Théorème. — *Les polaires de tous les points d'une conique, par rapport aux côtés d'un triangle inscrit à cette conique, passent par un même point.*

Ce théorème se démontre facilement par projection, ou analytiquement comme il suit :

L'équation, en coordonnées trilatères d'une conique circonscrite au triangle, est

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0.$$

Elle exprime que la polaire $\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}=0$ d'un point x, y, z de cette conique passe constamment par le point qui a pour coordonnées a, b, c.

Théorème correspondant sur la cubique gauche. — *Les plans polaires de tous les points d'une cubique gauche, par rapport aux faces d'un tétraèdre* A.B.C.D. *inscrit, passent par une droite fixe.*

D'après ce qu'on a vu, une cubique gauche passant par les points A, B, C, D est l'intersection de deux cônes ayant leurs sommets en A et B, par exemple, et passant par les quatre points.

ABCD étant le tétraèdre de référence, on a donc, pour les équations de cette courbe,

$$\frac{b}{y}+\frac{c}{z}+\frac{d}{v}=0$$

et

$$\frac{a'}{x}+\frac{c'}{z}+\frac{d'}{v}=0$$

Elles expriment que le plan polaire

$$\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}+\frac{V}{v}=0$$

du point ayant pour coordonnées x, y, z, v, passe constamment par la droite joignant les points ayant pour coordonnées : $0, b, c, d$ et $a', 0, c', d'$.

On pourrait prendre pour base de la théorie des cubiques gauches la féconde relation de Bobillier entre huit plans septaires.

Ce géomètre a démontré que, si huit plans sont septaires, on peut déterminer les coefficients λ_i, de telle sorte que, $P_i = 0$ étant l'équation de l'un des plans, on ait l'identité

$$\sum_{i=1}^{i=8} \lambda_i P_i^2 = 0.$$

En faisant de cette identité deux membres contenant chacun quatre termes, on a le remarquable théorème suivant :

Théorème. — *Si les huit faces de deux tétraèdres sont septaires, ces deux tétraèdres sont autopolaires par rapport à une même quadrique; de plus, on voit, en prenant cette quadrique comme quadrique de transformation par polaires réciproques, que les huit sommets des deux tétraèdres sont aussi septaires.*

On reviendra, à propos d'une autre question, sur le théorème correspondant de la théorie des coniques.

Il résulte du théorème précédent que le huitième point septaire des sept points A, B, C, D, 1, 2, 3 s'obtient en prenant le pôle du plan 1, 2, 3 par rapport à la quadrique, à laquelle le tétraèdre A, B, C, D et le triangle 1, 2, 3 sont respectivement autopolaires.

ABCD étant le tétraèdre de référence, et α_i, β_i, γ_i, δ_i les coordonnées d'un des sommets du triangle 1, 2, 3, l'équation de cette conique est

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & v^2 \\ \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \delta_1\delta_2 \\ \alpha_2\alpha_3 & \beta_2\beta_3 & \gamma_2\gamma_3 & \delta_2\delta_3 \\ \alpha_3\alpha_1 & \beta_3\beta_1 & \gamma_3\gamma_1 & \delta_3\delta_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que le tétraèdre et le triangle soient inscrits à une cubique gauche, il faut que le pôle du plan du

triangle 1.2.3, par rapport à cette conique, soit mal déterminé, ce qui exige que la quadrique soit mal déterminée.

On verrait sans peine que cette condition se réduit à ce que deux déterminants mineurs soient nuls; par exemple

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 \\ \alpha_2\alpha_3 & \beta_2\beta_3 & \gamma_2\gamma_3 \\ \alpha_3\alpha_1 & \beta_3\beta_1 & \gamma_3\gamma_1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \delta_1\delta_2 \\ \alpha_2\alpha_3 & \beta_2\beta_3 & \delta_2\delta_3 \\ \alpha_3\alpha_1 & \beta_3\beta_1 & \delta_3\delta_1 \end{vmatrix}.$$

On peut écrire cette double condition par les deux équations

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & \frac{1}{\beta_1} & \frac{1}{\gamma_1} \\ \frac{1}{\alpha_2} & \frac{1}{\beta_2} & \frac{1}{\gamma_2} \\ \frac{1}{\alpha_3} & \frac{1}{\beta_3} & \frac{1}{\gamma_3} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & \frac{1}{\beta_1} & \frac{1}{\delta_1} \\ \frac{1}{\alpha_2} & \frac{1}{\beta_2} & \frac{1}{\delta_2} \\ \frac{1}{\alpha_3} & \frac{1}{\beta_3} & \frac{1}{\delta_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Elles expriment que les plans polaires des points 1, 2 et 3, par rapport au tétraèdre ABCD, plans ayant pour équations

$$\frac{x}{\alpha_1} + \frac{y}{\beta_1} + \frac{z}{\gamma_1} + \frac{v}{\delta_1} = 0,$$
$$\frac{x}{\alpha_2} + \frac{y}{\beta_2} + \frac{z}{\gamma_2} + \frac{v}{\delta_2} = 0,$$
$$\frac{x}{\alpha_3} + \frac{y}{\beta_3} + \frac{z}{\gamma_3} + \frac{v}{\delta_3} = 0,$$

passent, comme on le savait déjà, par une même droite.

Autre analogie entre la cubique gauche et la conique.

La courbe du second ordre est aussi de seconde classe, et ce fait ne se reproduit pas pour la courbe générale d'un ordre supérieur à 2.

De même, la courbe gauche du troisième ordre, ou cubique gauche, est de troisième classe, en convenant que la classe d'une courbe gauche est marquée par le nombre des plans osculateurs qu'on peut lui mener par un point de l'espace.

Cette proposition résulte immédiatement du théorème qu'on va démontrer :

Théorème. — *La surface développable, formée par les tangentes à une cubique gauche, est du quatrième ordre et de la troisième classe.*

L'ordre étant marqué par le nombre des points d'intersection d'une droite quelconque D avec la surface, nous allons chercher ce nombre ou, ce qui revient au même, le nombre des plans tangents à la cubique qu'on peut mener par la droite D.

Projetons parallèlement à la droite D la courbe gauche sur un plan quelconque. La projection est une cubique plane ayant un point double.

Les plans tangents à la cubique gauche menés par D coupent le plan de projection suivant les tangentes menées à la cubique plane, par le point d où D coupe le plan de projection. Or la cubique plane, ayant un point double, est de quatrième classe, et les tangentes menées par d, par suite les plans tangents menés par D sont au nombre de quatre; la première partie du théorème est démontrée.

On en déduit immédiatement :

Corollaire. — *Les traces des tangentes à une cubique gauche sur un plan osculateur à cette courbe sont une conique. Cette conique est aussi l'enveloppe des traces des plans osculateurs à la cubique.*

La seconde partie du théorème est dès lors facile à

démontrer; car, si dans le plan osculateur à une cubique gauche on prend un point quelconque A, on pourra par ce point mener à la courbe deux nouveaux plans osculateurs seulement, dont les traces sur le premier seront les tangentes menées de A à la conique du corollaire précédent.

On termine ici l'étude des cubiques gauches; on se contentera d'ajouter les remarques suivantes :

1° *Une cubique gauche et une droite qui la coupe en deux points sont à l'intersection de deux quadriques.*

Par suite, si l'on donne sept points, leur huitième point septaire est sur la droite qui est menée par l'un d'eux et coupe en deux points la cubique gauche déterminée par les six autres.

2° *Par une cubique gauche et deux points quelconques de l'espace on peut faire passer en général une et une seule quadrique.*

Il résulte de là que, si neuf points sont sur la courbe gauche du quatrième ordre, intersection de deux quadriques, la cubique gauche déterminée par six d'entre eux coupe le plan des trois autres en trois points, ces six points sont sur une conique.

Digression sur la condition simple du premier ordre, la plus générale, a laquelle on peut astreindre une conique.

Nous dirons qu'on astreint une conique à une condition simple du premier ordre, quand on donne entre les six coefficients de son équation en coordonnées cartésiennes ou trilatères une relation homogène du premier degré par rapport aux coefficients.

C'est ainsi qu'on astreint une conique à une condition simple du premier ordre, quand on lui impose de passer par un point, ou encore, d'être conjuguée par rapport à deux points.

On se propose de trouver la forme générale de la relation géométrique à laquelle correspond cette condition analytique.

On peut poser le problème d'une façon un peu différente, mais plus nette, en disant :

Trouver la condition géométrique à laquelle satisfont toutes les coniques C, *dont l'équation est*

$$C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 + \lambda_4 C_4 + \lambda_5 C_5,$$

C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 *étant les équations de coniques quelconques et* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ *des coefficients quelconques.*

La solution de cette question et de celles du même genre est fort utile dans l'application de l'analyse à la Géométrie. La difficulté qu'on rencontre à étudier la Géométrie au moyen de l'Algèbre consiste souvent, en effet, moins à poser les équations et à les combiner, qu'à interpréter géométriquement le résultat analytique trouvé. On a fait, pour ainsi dire, une version de la langue géométrique en langue analytique, pour poser les équations primitives du problème : il faut faire un thème pour donner un sens géométrique aux équations finales ; le thème est souvent plus difficile que la version.

C'est ainsi, par exemple, que de la relation, si facile à écrire, entre les coordonnées de dix points d'une quadrique, on n'a pas encore pu déduire leur relation de position.

Il est très utile de pouvoir conclure immédiatement

de ce fait analytique que l'équation d'une courbe ne contient qu'un seul paramètre variable au premier degré, le fait géométrique qu'elle passe par un certain nombre de points fixes.

Il serait à désirer qu'on eût aussi la solution dans le cas où l'équation contient un nombre quelconque de paramètres au premier degré. C'est, comme on l'a dit, cette question qu'on va traiter, pour les seules coniques malheureusement.

La voie qui mène à la solution est un peu détournée.

Considérons dans l'espace cinq points quelconques et un plan. Toutes les quadriques passant par ces cinq points coupent le plan suivant une conique. Cette conique n'est évidemment pas quelconque; elle satisfait à la condition simple, du premier ordre, la plus générale.

Car, l'équation générale des quadriques passant par ces cinq points contient quatre paramètres arbitraires au premier degré; la conique d'intersection du plan fixe donné avec cette quadrique renferme encore dans son équation ces quatre paramètres au premier degré, et ils y sont distincts.

Le problème revient donc à trouver la condition pour qu'une conique et cinq points quelconques soient sur une quadrique.

Lemme. — *Si cinq points quelconques de l'espace, et une conique sont sur une quadrique, on peut trouver sur cette conique une infinité de systèmes de trois points qui, avec les cinq points de l'espace forment un système septaire.*

En effet, si par les cinq points et un point quelconque A de la conique on fait passer une cubique gauche, cette cubique coupe le plan de la conique en

deux nouveaux points; la droite qui les joint coupe la conique en deux points B et C, qui avec le point A et les cinq points de l'espace forment un système septaire, puisqu'ils sont à l'intersection de la quadrique donnée et de la quadratique (intersection de deux quadriques) constituée par la cubique gauche et la droite BC.

Théorème. — *Si un pentagone gauche et un triangle ont pour sommets huit points septaires, le triangle est autopolaire par rapport à une conique déterminée, quand on connaît le pentagone et le plan du triangle.*

Si, en effet, on se reporte au théorème déduit plus haut de la relation de Bobillier, on voit que cette conique est l'intersection du plan donné avec la quadrique définie comme il suit : Le tétraèdre ayant pour sommets quatre des sommets du pentagone gauche lui est autopolaire ; de plus, le cinquième sommet de ce pentagone admet par rapport à elle, pour plan polaire, le plan donné.

On peut déduire de là une définition plane de cette conique, et dire avec P. Serret : Cette conique a pour polaires de chacun des sommets du pentagone plan, intersection du plan donné avec le pentagone gauche, les côtés opposés de ce même pentagone.

Mais ce qui nous importe, c'est que cette conique est définie quand on donne le plan et le pentagone gauche.

De ce théorème et du lemme on déduit immédiatement la proposition suivante :

Théorème. — *Si une conique située dans un plan donné est sur une quadrique passant par cinq points donnés dans l'espace, on peut inscrire à cette conique une infinité de triangles autopolaires par rapport à une conique déterminée par les données.*

De ce théorème on conclut la solution du problème proposé :

Théorème. — *La condition simple du premier ordre la plus générale à laquelle on puisse astreindre une conique est de lui imposer d'être telle qu'on puisse lui inscrire une infinité de triangles autopolaires par rapport à une conique donnée.*

Cette condition paraît au premier abord n'être pas simple; elle l'est cependant, puisqu'elle n'est qu'une transformation d'une condition simple. Le théorème suivant ne laisse d'ailleurs aucun doute à cet égard.

Théorème. — *Si deux coniques sont telles qu'on puisse inscrire à l'une un triangle antopolaire par rapport à l'autre, on peut en inscrire une infinité, satisfaisant à la même condition.*

Cette proposition peut se déduire, comme le célèbre théorème de Poncelet, dont elle est l'analogue, de l'identité de Bobillier, qui exprime que six droites D_1, $D_2, \ldots, D_6$ sont tangentes à une conique :

$$\lambda_1 D_1^2 + \lambda_2 D_2^2 + \lambda_3 D_3^2 = \lambda_4 D_4^2 + \lambda_5 D_5^2 + \lambda_6 D_6^2$$

Cette identité exprime que, si deux triangles sont circonscrits à une conique, ils sont autopolaires par rapport à une seconde conique, et aussi (par transformation par polaires réciproques) inscrits à une troisième conique.

On retiendra seulement, pour la démonstration du théorème énoncé, que si deux triangles sont inscrits à une conique, ils sont autopolaires par rapport à une autre conique.

Cela étant, soient deux coniques φ et φ_1 et ABC un triangle inscrit dans la conique φ et autopolaire par rap-

port à la conique φ_1. Prenons par rapport à la conique φ_1 la polaire d'un point quelconque D de la conique φ; soient E et F les points où cette polaire coupe la conique φ; les deux triangles ABC et DEF sont inscrits à la conique φ; ils sont donc autopolaires à une même conique qui n'est autre que la conique φ_1, définie par les conditions suffisantes, qu'elle soit autopolaire par rapport au triangle ABC et qu'elle admette la droite EF, comme polaire du point D.

La démonstration analytique de ce théorème conduit à un calcul intéressant qui donne l'équation homogène et du premier degré par rapport aux coefficients de l'équation de la conique φ, qui exprime que les coniques φ et φ_1 sont dans la dépendance indiquée dans l'énoncé.

Si la conique φ se réduisait à un système de deux droites, il est évident que ces deux droites seraient conjuguées par rapport à la conique φ_1.

On peut, à l'aide de cette remarque, démontrer les élégants théorèmes de P. Serret sur les quadriques et les quadratiques.

Quelques théorèmes sur les quadriques ayant leurs analogues dans la théorie des coniques, et pouvant servir a la recherche de la relation entre dix points d'une quadrique.

Théorème. — *Dix points étant sur une quadrique, si par six d'entre eux on fait passer une quadrique (a), et par les quatre autres une quadrique (b) passant par l'intersection de (a) avec un plan fixe quelconque, le plan de l'autre conique commune aux quadriques (a) et (b) passe par un point fixe quand (a) varie.*

Prenons les quatre points du second groupe pour som-

mets du tétraèdre de référence; soient P, P_1, P_2, P_3 les équations de quatre surfaces du second ordre passant par les six autres points; l'équation générale des quadriques passant par ces six points est

$$\lambda P + \mu P_1 + \nu P_2 + \rho P_3 = 0.$$

Le déterminant suivant, égal à o, exprime qu'on peut déterminer les coefficients λ, μ, ν, ρ de telle sorte que la quadrique passe par les sommets du tétraèdre de référence

$$\begin{vmatrix} Px^2 & P_1x^2 & P_2x^2 & P_3x^2 \\ Py^2 & P_1y^2 & P_2y^2 & P_3y^2 \\ Pz^2 & P_1z^2 & P_2z^2 & P_3z^2 \\ Pv^2 & P_1v^2 & P_2v^2 & P_3v^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans ce déterminant, P_ix^2 est le coefficient de x^2 dans l'équation $P_i = 0$.

Si

$$P_i = A_ix^2 + A'_iy^2 + A''_iz^2 + A'''_iv^2 + \ldots,$$

le déterminant devient

$$\begin{vmatrix} A & A' & A'' & A''' \\ A_1 & A'_1 & A''_1 & A'''_1 \\ A_2 & A'_2 & A''_2 & A'''_2 \\ A_3 & A'_3 & A''_3 & A'''_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation exprime que les dix points donnés sont sur une conique.

Soit $P_i = 0$ l'équation de la quadrique (a) de l'énoncé; cherchons l'équation de la quadrique (b) correspondante.

Soient

$$px + qy + rz + sv = 0$$

l'équation du plan fixe donné et

$$\alpha_ix + \beta_iy + \gamma_iz + \delta_iv = 0$$

l'équation du plan variable de la seconde conique d'intersection des surfaces (a) et (b).

L'équation générale des quadriques passant par l'intersection de (a) avec chacun de ces plans est

$$A_i x^2 + A'_i y^2 + A''_i z^2 + A'''_i v^2 + \ldots \\ + (px + qy + vz + sv)(\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z + \delta_i r) = 0;$$

pour que cette quadrique soit la quadrique (b), il faut qu'elle passe par les sommets du tétraèdre de référence, c'est-à-dire que les coefficients α_i, β_i, γ_i, δ_i soient déterminés comme il suit :

$$A_i = p\alpha_i, \quad A'_i = q\beta_i, \quad A''_i = r\gamma_i, \quad A'''_i = s\delta_i.$$

En remplaçant A_i, A''_i, ... par ces valeurs dans le déterminant écrit plus haut, et divisant par $pqrs$, on a un déterminant nul, qui exprime que les plans

$$\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z + \delta_i v = 0$$

passent par un point fixe.

Corollaires. — En prenant pour les quadriques P_i quatre systèmes de deux plans passant par les six points et pour plan fixe le plan de l'infini, on a la proposition suivante :

Si les six sommets d'un octaèdre et les quatre sommets d'un tétraèdre sont sur une quadrique, les quatre paraboloïdes hyperboliques circonscrits au tétraèdre et ayant respectivement pour plans directeurs les faces opposées de l'octaèdre coupent ces plans directeurs en deux droites d'un même plan; ces quatre plans passent par un même point.

En gardant le plan de l'infini pour plan fixe et laissant aux quadriques P_i toute la généralité qu'elles comportent, on a cette autre proposition :

Si un hexagone gauche et un tétraèdre sont inscrits

à une même quadrique, les plans d'intersection de deux quadriques homothétiques, dont l'une est circonscrite à l'hexagone et l'autre au tétraèdre, passent par un même point.

Ce théorème a pour analogue dans le plan le théorème suivant :

Théorème. — *Deux triangles étant inscrits à une conique, si l'on circonscrit à l'un une conique* C *et à l'autre une conique* C_1 *et que ces coniques* C *et* C_1 *se coupent en deux points sur une droite fixe, la droite qui joint leurs deux autres points d'intersection passe par un point fixe.*

On démontrerait, comme le précédent, cet autre théorème :

Théorème. — *Sept points de l'espace et trois points d'un plan* P *étant sur une quadrique, si l'on mène par les sept points une quadrique et par les trois points du plan* P *une conique, qui se coupent en deux points sur une droite fixe, la droite qui joint leurs deux autres points d'intersection passe par un point fixe.*

On peut retenir de ce théorème cette importante conclusion :

On considère les trois coniques C_1, C_2, C_3 d'intersection de trois quadriques avec un plan P; si les huit points d'intersection de ces trois quadriques (ils sont septaires) et trois points A, B et C du plan P sont sur une même quadrique, il existe entre les coniques C_1, C_2, C_3 et le triangle ABC une relation de position. Par suite, trois quadriques quelconques passant par les coniques C_1, C_2 et C_3 se coupent en huit nouveaux points septaires qui sont sur une quadrique passant par les points A, B, C.

Ce théorème est à ce point de vue l'analogue du théorème plan de Desargues, qui consiste essentiellement en ceci :

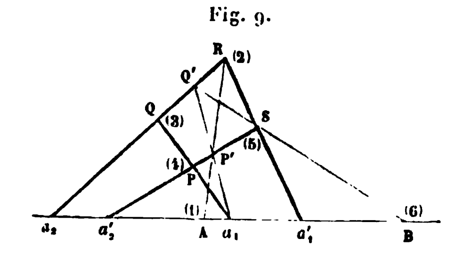
On considère les points d'intersection de deux coniques C_1 et C_2, avec une droite D; soient a_1 et a'_1, a_2 et a'_2 ces points.

Si les quatre points d'intersection des coniques C_1 et C_2 et deux points A et B de la droite D sont sur une même conique, il existe entre les points A, B, a_1, a'_1, a_2, a'_2 une relation de position. On en conclut, sans avoir besoin de connaître cette relation, que deux coniques quelconques passant l'une par les points a_1 et a'_1, l'autre par les points a_2 et a'_2, se coupent en quatre points qui sont sur une conique passant par A et B.

On peut déduire de là le théorème de Pascal, ou plus exactement une démonstration synthétique du théorème de Pascal, qui suppose la connaissance préalable de son énoncé.

Soit en effet PQRS un quadrilatère dont les côtés opposés constituent les coniques C_1 et C_2 (*fig.* 9). (Ces

Fig. 9.



notations et les hypothèses sont indiquées plus haut.) D'après ce qu'on vient de dire, les points R, S et les points P', Q', où une droite passant par a_1 coupe les droites PS et QR, sont situés sur une conique passant par A et B.

Or, si l'on prend pour le point Q', le point d'intersec-

tion de la droite QR avec la droite BS, il y a trois de ces six points, qu'on vient de voir être sur une conique, qui sont en ligne droite; ce sont les points B, S et Q'. Les trois autres points A, R et P' sont donc aussi en ligne droite. Si dès lors on appelle 1 le point A, 2 le point R, 3 le point Q, 4 le point P, 5 le point S et 6 le point B, on voit que les côtés opposés de l'hexagone 1.2.3.4.5.6 inscrit à une conique se coupent en trois points P', Q', a'_1 en ligne droite.

Ce n'est pas pour sa valeur intrinsèque qu'on a donné cette démonstration; c'est pour indiquer le parti qu'on peut tirer, dans la recherche de la relation entre dix points d'une quadrique, des théorèmes qui précèdent. Ce n'est vraisemblablement pas par analyse qu'on arrivera à cette relation symétrique inconnue; c'est plutôt par une supposition habile, faite *a priori* sur sa forme. Les théorèmes précédents pourront alors être employés avec fruit pour vérifier l'exactitude de cette supposition.

On va donner un dernier théorème assez intéressant par ses applications à la quadratique.

On sait que le plan polaire d'un point P de l'espace par rapport à toutes les quadriques qu'on peut mener par sept points donnés passe par un même point. Si l'on ne donnait que six points, le plan polaire serait en général complètement indéterminé, sauf dans le cas particulier suivant :

Théorème. — *Les plans polaires d'un point* O *pris sur l'intersection de deux plans* X *et* Y *par rapport à toutes les quadriques passant par six points fixes situés dans ces deux plans passent par un point fixe.*

Si, en effet, on prend ces deux plans pour plans des x et des y et un troisième plan passant par O pour plan des z, et que $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ soient les équations

de trois quadriques passant par les six points donnés, l'équation générale des quadriques qui passent par ces six points est

$$\lambda P + \mu Q + \nu R + XY = o.$$

Le plan polaire de l'origine a pour équation

$$\lambda P'_t + \mu Q'_t + \nu R' = o$$

(P'_t est la dérivée du polynôme P rendu homogène par l'introduction de la lettre t).

Cette équation ne contenant que deux paramètres arbitraires, le théorème est démontré.

Si donc on donne, dans chacune des faces X, Y, Z d'un trièdre dont O est le sommet, trois points, on peut construire, au moyen de trois de ses points, le plan polaire du point O par rapport à la quadrique déterminée par les neuf points donnés.

Si les neuf points donnés sont sur une quadratique, ce plan polaire est mal déterminé; par suite, les trois points qui le déterminent dans le cas général sont en ligne droite.

On pourrait peut-être, de cette forme de la relation double qui lie neuf points d'une quadrique, passer à une relation plus simple et plus élégante, à la relation pascalienne.

On voit, en résumé, que dans la seconde Partie de ce Mémoire on n'a résolu qu'une seule des trois questions qui en sont l'objet principal. De plus longs développements, qu'un résultat précis ne couronnerait pas, seraient oiseux.

Je me suis appliqué à citer les auteurs à qui j'ai fait des emprunts. Si j'ai énoncé comme miennes des propositions déjà connues, je prie qu'on impute cela à mon peu d'érudition, et je mets ma loyauté à la disposition de toute réclamation fondée.

GÉNÉRALISATION DE LA SÉRIE DE LAGRANGE;

PAR M. E. CESARO.

Dans le *Jornal de Sciencias mathematicas, physicas e naturaes* (n° XXVIII, Lisboa, 1880), M. Teixeira est parvenu à une formule extrêmement remarquable, permettant de *développer, suivant les puissances croissante de x, la fonction z, en supposant que l'on ait*

$$z = f(y), \quad y = a + x\varphi_1(y) + x^2\varphi_2(y) + x^3\varphi_3(y) + \ldots.$$

Nous allons rattacher cette question aux principes précédemment exposés dans nos articles sur le *Calcul isobarique*.

Posons

$$u = x\varphi_1(y) + x^2\varphi_2(y) + x^3\varphi_3(y) + \ldots.$$

Cette fonction dépend de x et y : nous désignerons par $u', u'', u''', \ldots$ ses dérivées successives, relatives à x. Cela étant, observons que

$$\frac{dy}{dx} = u' + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{da} = 1 + \frac{du}{dy}\frac{dy}{da},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = u'\frac{dy}{da}.$$

A cause de

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dv}{da} = \frac{dz}{dy}\frac{dv}{da},$$

on a aussi

$$(1) \qquad \frac{dz}{dx} = u'\frac{dz}{da}.$$

Cette relation sert de point de départ, dans la démonstration de M. Teixeira.

Rappelons, d'autre part, la *propriété fondamentale* de l'algorithme

$$U_{p,\nu} = \overset{\nu}{\underset{r}{S}} \left[\frac{u^{(r)}}{r!}\right].$$

Elle consiste dans l'égalité

$$(2) \qquad U'_{p,\nu} = (p+1)U_{p+1,\nu} - \nu u' U_{p,\nu-1},$$

ainsi que nous l'avons fait voir dans notre article sur les *dérivées des fonctions de fonctions*.

La relation (2) est toujours vraie, pourvu que l'on convienne de prendre $U_{p,\nu} = 0$, lorsque ν n'est pas compris entre 1 et p, inclusivement.

Cela posé, nous allons démontrer l'importante formule que voici :

$$(3) \qquad \frac{1}{p!}\frac{d^p z}{dx^p} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left[\frac{1}{\nu!}\frac{d^{\nu-1}}{da^{\nu-1}}\left(\frac{dz}{da} U_{p,\nu}\right)\right].$$

Cette formule est vraie dans le cas de $p = 1$; car elle se réduit, alors, à l'égalité (1). La formule (3) sera donc établie si, en la supposant vraie pour la valeur p, on démontre qu'elle subsiste pour la valeur $p+1$. Or,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{da} U_{p,\nu}\right) = \frac{d}{da}\left(\frac{dz}{dx}\right) U_{p,\nu} + \frac{dz}{da}\left(U'_{p,\nu} + u'\frac{dU_{p,\nu}}{da}\right),$$

ou bien, en tenant compte de (1),

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{da} U_{p,\nu}\right) = \frac{d}{da}\left(\frac{dz}{dx} U_{p,\nu}\right) + \frac{dz}{da} U'_{p,\nu},$$

ou enfin, en vertu de (2),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{da} U_{p,\nu}\right) = {} & (p+1)\frac{dz}{da} U_{p+1,\nu} \\ & + \frac{d}{da}\left(\frac{dz}{dx} U_{p,\nu}\right) - \nu\frac{dz}{dx} U_{p,\nu-1}.\end{aligned}$$

La dérivation de (3) donne donc

$$\frac{1}{(p+1)!}\frac{d^{p+1}z}{dx^{p+1}} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left[\frac{1}{\nu!}\frac{d^{\nu-1}}{da^{\nu-1}}\left(\frac{dz}{da}\mathrm{U}_{p+1,\nu}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{p+1}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left[\frac{1}{\nu!}\frac{d^{\nu}}{da^{\nu}}\left(\frac{dz}{dx}\mathrm{U}_{p,\nu}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{p+1}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left[\frac{1}{(\nu-1)!}\frac{d^{\nu-1}}{da^{\nu-1}}\left(\frac{dz}{dx}\mathrm{U}_{p,\nu-1}\right)\right].$$

Les deux dernières sommes s'entre-détruisent, à l'exception du terme

$$\frac{1}{(p+1)!}\frac{d^p}{da^p}\left(\frac{dz}{dx}\mathrm{U}_{p,p}\right) = \frac{1}{(p+1)!}\frac{d^p}{da^p}\left(\frac{dz}{da}\mathrm{U}_{p+1,p+1}\right).$$

$\mathrm{U}_{p,p}$ n'est autre chose, en effet, que u'^p. Donc, enfin,

$$\frac{1}{(p+1)!}\frac{d^{p+1}z}{dx^{p+1}} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p+1}\left[\frac{1}{\nu!}\frac{d^{\nu-1}}{da^{\nu-1}}\left(\frac{dz}{da}\mathrm{U}_{p+1,\nu}\right)\right].$$

C'est ce qu'il s'agissait de trouver.

Maintenant la question du développement de z est bien facile à résoudre par l'emploi de la *formule de Maclaurin*. Remarquons d'abord que, pour $x = 0$, on a

$$y = a,\quad \frac{dz}{da} = f'(a),\quad u^{(r)} = r!\,\varphi_r(a).$$

Conséquemment, la formule (3) devient

$$(4)\qquad \frac{1}{p!}\left(\frac{d^p z}{dx^p}\right)_0 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\left(\frac{1}{\nu!}\frac{d^{\nu-1}}{da^{\nu-1}}\left\{f'(a)\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{\nu}[\varphi_r(a)]\right\}\right).$$

Tel est le coefficient de x^p, dans le développement cherché.

Soit, par exemple,

$$z = f(y),\quad y = a + x\varphi(y).$$

Dans ce cas, pour $x = 0$

$$\Lambda_{p,\nu} = \begin{cases} 0 & \text{en général}, \\ \varphi^p(a) & \text{pour } \nu = p. \end{cases}$$

La formule (4) donne donc

$$\left(\frac{d^p z}{dx^p}\right)_0 = \frac{d^{p-1}}{da^{p-1}}[f'(a)\varphi^p(a)].$$

Puis, par le théorème de Maclaurin,

$$f(y) = f(a) + \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \frac{d^p}{da^p}[f'(a)\varphi^{p+1}(a)].$$

C'est la *formule de Lagrange*.

Voyons ce que devient la formule (4) dans d'autres cas particuliers. Soit à développer la fonction y, satisfaisant à la relation

$$y = a + \psi(x)\varphi(y),$$

où

$$\psi(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.$$

Dans ce cas

$$\varphi_r(y) = a_r \varphi(y), \quad \overset{\nu}{\underset{p}{S}}[\varphi_r(a)] = \Lambda_{p,\nu}\varphi^\nu(a),$$

pourvu que l'on pose

$$\Lambda_{p,\nu} = \overset{\nu}{\underset{p}{S}}(a_r).$$

La formule (4) devient

$$\frac{1}{p!}\left(\frac{d^p y}{dx^p}\right)_0 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{ \frac{\Lambda_{p,\nu}}{\nu!} \frac{d^{\nu-1}}{da^{\nu-1}}[\varphi^\nu(a)] \right\}.$$

Soit, par exemple

$$y = a + (e^x - 1)e^y.$$

On sait que

$$A_{p,\nu} = \overset{\nu}{\underset{p}{S}} \left(\frac{1}{r!}\right) = \frac{\Delta^\nu(0^p)}{p!}.$$

Par conséquent

$$\left(\frac{d^p y}{dx^p}\right)_0 = \Delta(0^p)\, e^a + \frac{2\,\Delta^2(0^p)}{1.2} e^{2a} + \frac{3^2\Delta^3(0^p)}{1.2.3} e^{3a} + \ldots.$$

Encore une application. Soit à chercher le développement de la fonction y, satisfaisant à la relation

$$y = a + x\psi(x+y).$$

Dans ce cas

$$f(x) = x, \quad \varphi_r(x) = \frac{\psi^{(r-1)}(x)}{(r-1)!},$$

et l'égalité (4) devient

$$(5) \qquad \frac{1}{p!}\left(\frac{d^p y}{dx^p}\right)_0 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{ \frac{1}{\nu!}\, \frac{d^{\nu-1}}{da^\nu} \overset{\nu}{\underset{p}{S}} \left[\frac{\psi^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}\right] \right\}.$$

Les propriétés de l'algorithme W, étudié dans la Note *sur les dérivées des fonctions de fonctions*, permettent de donner, à l'égalité (5), la forme suivante :

$$(6) \quad \frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{d^p y}{dx^p}\right)_0 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{ C_{p,\nu} \overset{\nu}{\underset{p+\nu-1}{S}} \left[\frac{\psi^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}\right] \right\}.$$

Soit, par exemple, $\psi(x) = e^x$, de sorte que

$$y = a + x e^{x+y}.$$

On sait que

$$\overset{\nu}{\underset{p}{S}} \left[\frac{e^a}{(r-1)!}\right] = \frac{\nu^{p-\nu}}{(p-\nu)!} e^{\nu a}.$$

Par suite, la formule (6) devient

$$\left(\frac{d^p y}{dx^p}\right)_0 = C_{p,1}\, e^a + 2^{p-1} C_{p,2}\, e^{2a} + 3^{p-1} C_{p,3}\, e^{3a} + \ldots$$

Tel est, dans le développement de y, le coefficient de $\frac{x^p}{p!}$. On trouve ainsi

$$y = a + e^a x + (e^a + e^{2a})x^2 + (e^a + 4e^{2a} + 3e^{3a})\frac{x^3}{2}$$
$$+ (e^a + 12e^{2a} + 27e^{3a} + 64e^{4a})\frac{x^4}{6} + \ldots$$

Dans tout ce qui précède, on n'a pas tenu compte de la convergence des séries qui résultent de l'application de la formule de Maclaurin. On sait que l'établissement des conditions de convergence constitue un important et délicat sujet d'études : il en est de même de la question de savoir quelle valeur de y doit être considérée comme représentée par la série de Lagrange généralisée.

SUR UN THÉORÈME DE M. LAGUERRE;

PAR M. E. CESARO.

I. Il s'agit de la *Question* 1389 (3e série, t. I, p. 141), dont nous croyons devoir modifier légèrement l'énoncé, en démontrant que :

Si l'équation $f(z) = 0$, de degré n, n'admet que des racines réelles et simples,

1° *L'équation $f^2(z) + k^2 f'^2(z) = 0$, où k est réel, a toutes ses racines imaginaires ;*

2° *Dans chacune de ces racines, la valeur absolue du coefficient de i ne surpasse pas la valeur absolue de kn.*

II. 1° Puisque les racines $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de $f(z) = 0$ sont simples, il est clair que l'équation

$$f^2(z) + k^2 f'^2(z) = 0$$

n'a pas de racines en commun avec $f(z) = 0$, et, par suite, elle peut être mise sous la forme

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{z - a_\nu} = \pm \frac{i}{k}.$$

Remplaçons z par $x + iy$, et, après réduction des deux membres à la forme normale, égalons entre eux les coefficients de i. Il vient

$$y \sum_{1}^{n} \frac{1}{(x - a_\nu)^2 + y^2} = \pm \frac{1}{k}.$$

La somme qui figure dans le premier membre est une quantité essentiellement positive. Elle est finie; car, en vertu des hypothèses, il n'est pas possible d'avoir simultanément $x = a_\nu$, $y = 0$. Cela posé, le second membre étant différent de zéro, y *ne peut être nul,* résultat évident *a priori*.

III. 2° Soient Y, K les valeurs absolues de y, k. On doit avoir

$$\frac{1}{KY} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{(x - a_\nu)^2 + Y^2} \leq \frac{n}{Y^2};$$

d'où

$$Y \leq Kn.$$

IV. *Remarques.* — 1° On voit sans peine qu'il faut prendre le signe d'inégalité ou celui d'égalité, suivant que n est supérieur ou égal à l'unité.

2° Il est nécessaire que les racines de $f(z) = 0$ soient simples. Il est aisé de voir comment se modifie l'énoncé du théorème, dans le cas de racines multiples.

3° Si l'on trace, à la distance Kn de l'axe des x, les deux parallèles à cet axe, tous les zéros de la fonction $f^2(z) + k^2 f'^2(z)$ sont compris entre ces droites, mais

aucun d'eux n'est situé sur l'axe des x. Tel est, en résumé, le théorème de M. Laguerre.

4° Ce théorème est susceptible de généralisation, soit au point de vue des conditions qu'il exige, soit aussi dans la nature des fonctions auxquelles il est applicable. C'est ce que nous montrerons, sous peu, dans nos *Fondamenti per la Teorica delle funzioni olomorfe, di genere qualunque.*

V. Cependant, tout en restant dans le domaine des fonctions algébriques, nous exposerons dès maintenant un essai d'extension fort naturel. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_n$ les zéros de $f(z)$, supposés simples, mais distribués arbitrairement dans le plan. Nous voulons savoir comment sont situés les zéros de $f(z) + \mathrm{M}f'(z)$, où M est l'affixe d'un point quelconque. A cet effet, cherchons les racines de l'équation

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_1^n \frac{1}{z - c_\nu} = -\frac{1}{\mathrm{M}} = -\frac{\mathrm{A} - i\mathrm{B}}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}.$$

Si l'on pose

$$z = x + iy, \quad c_\nu = a_\nu + ib_\nu, \quad \delta_\nu^2 = (a_\nu - x)^2 + (b_\nu - y)^2,$$

la dernière équation se dédouble en

$$\sum_1^n \frac{a_\nu - x}{\delta_\nu^2} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}, \quad \sum_1^n \frac{b_\nu - y}{\delta_\nu^2} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}.$$

Considérons un zéro Q de l'équation proposée. En chaque zéro de $f(z)$ déposons une masse, inversement égale au carré de la distance à Q. Soit G le centre de gravité de ce système, et appelons ξ, η ses coordonnées. Les relations obtenues en dernier lieu deviennent

$$\frac{\xi - x}{\mathrm{A}} = \frac{\eta - y}{\mathrm{B}} = \frac{1}{(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)\mu},$$

μ étant la masse résultaute. Conséquemment, *les droites* QG, OM *sont parallèles*. En outre,

$$QG.OM = \frac{1}{\mu}.$$

D'après cela, le point G est complètement déterminé. On voit qu'*il ne coïncide jamais avec* Q, et qu'*il est d'autant plus près de ce dernier point que* μ *est plus grand*.

VI. Supposons que les zéros de $f(z)$ soient alignés sur une droite Δ, de sorte que l'on ait, pour toute valeur de ν,

$$\beta_\nu \cos\varphi - \alpha_\nu \sin\varphi = h.$$

Par combinaison linéaire des équations obtenues dans le paragraphe précédent, on trouve

$$(y \cos\varphi - x \sin\varphi - h)\sum_1^n \frac{1}{\delta_\nu^2} = -\frac{B\cos\varphi - A\sin\varphi}{A^2 + B^2}.$$

Menons, par l'origine, la parallèle D à Δ. Si ϖ, p sont les distances respectives des points Q, M aux droites Δ, D, la dernière équation montre que, en considérant ces distances comme positives lorsqu'elles sont dirigées en sens inverse, on a

$$\varpi\mu = \frac{p}{A^2 + B^2},$$

et, par conséquent, ϖ et p ont même signe. En d'autres termes,

1° *Suivant que* M *est ou n'est pas situé dans la partie du plan limitée par* D *et contenant* Δ, *les zéros de l'équation proposée sont ou ne sont pas situés dans la partie du plan limitée par* Δ *et contenant* D;

2° *Si* M *est sur* D, *les zéros de la même équation sont nécessairement alignés sur* Δ.

VII. Considérons, pour un instant, ce dernier cas. La condition de parallélisme des droites OM, Δ donne

$$\frac{a_\nu - x}{A} = \frac{b_\nu - y}{B} = \pm \frac{\delta_\nu}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

et, par suite, les deux égalités de l'avant-dernier paragraphe deviennent

$$\sum_1^n \frac{1}{\delta_\nu} = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Prenons, sur Δ, une origine, à partir de laquelle on compte les distances $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des zéros de $f(z)$, et la distance λ d'un point variable. L'équation précédente peut s'écrire ainsi

$$\sum_1^n \frac{1}{\lambda_\nu - \lambda} = \text{const.}$$

Il est évident que, lorsque λ varie depuis une des quantités λ_ν jusqu'à la quantité immédiatement supérieure, le premier membre varie de $-\infty$ à $+\infty$, en croissant constamment, car sa dérivée par rapport à λ est positive. Il prend donc une fois, et une seule fois, la valeur constante du second membre. On peut, en conséquence, énoncer ce théorème :

Si les zéros de $f(z)$ sont situés sur une droite Δ, il en est de même des zéros de $f(z) + Mf'(z)$, pourvu que le point M se trouve sur la parallèle à Δ, passant par l'origine. Les zéros des deux fonctions s'alternent, sur Δ, de manière que, entre deux zéros consécutifs de l'une des fonctions, il existe toujours un zéro de l'autre fonction, et il n'en existe qu'un.

VIII. Plus généralement, il est facile de démontrer que :

Si les zéros de $f(z)$ sont situés sur une droite Δ, celle-ci contient aussi les zéros de $Nf(z)+Mf'(z)$, pourvu que l'angle des droites OM, ON *égale l'inclinaison de Δ sur l'axe des x. Les zéros des deux fonctions se succèdent sur Δ, suivant la loi de Rolle.*

On obtient, comme cas très particulier, le *théorème de Rolle,* en supposant $N=0$, $M=1$, $\Delta\equiv Ox$.

IX. *Remarques.* — 1° Revenons au cas de $N=1$, et M arbitrairement situé dans le plan. D'après ce qui a été vu plus haut, le centre de gravité d'un système de masses, appliquées aux zéros de $f(z)$, et variant en raison inverse du carré de la distance à un zéro Q de $f(z)+Mf'(z)$, se trouve à l'intersection de Δ avec la parallèle à OM, passant par Q. Dans le cas particulier, considéré par M. Laguerre, ce centre de gravité n'est autre que la projection de Q sur l'axe des x.

2° Tout ce qui a été dit précédemment est applicable aux fonctions holomorphes, du genre zéro, douées d'un coefficient exponentiel de la forme e^{mz}, m étant quelconque. Moyennant quelques modifications, les mêmes théorèmes peuvent être transportés aux fonctions holomorphes d'un genre quelconque.

X. Nous allons maintenant généraliser la seconde partie du théorème de M. Laguerre, en cherchant une limite supérieure de ϖ. Observons, à cet effet, que, à cause de $\delta_\nu \geqq \varpi$, on a

$$\frac{p}{(A^2+B^2)\varpi}=\mu=\sum_1^n\frac{1}{\delta_\nu^2}\leqq\frac{n}{\varpi^2},$$

d'où

$$\varpi \leqq n \frac{A^2 + B^2}{p}.$$

XI. On peut répéter les mêmes considérations pour la fonction $f(z) - Mf'(z)$. En les réunissant aux précédentes, on a cette généralisation du théorème de M. Laguerre :

1° *Si les zéros de $f(z)$ sont situés sur une droite Δ, les zéros de $f^2(z) - M^2 f'^2(z)$ sont ou ne sont pas situés sur la même droite, suivant que le point* M *se trouve ou ne se trouve pas sur la parallèle à Δ, menée par l'origine.*

2° *Dans le dernier cas, les zéros de la seconde fonction sont situés, de part et d'autre de Δ, entre les deux parallèles à cette droite, menées à une distance n fois plus grande que la distance de* M *au point d'intersection des perpendiculaires aux droites* OM, *Δ, passant respectivement par* O, M.

XII. En particulier, si les droites OM, Δ sont perpendiculaires entre elles, on a $A^2 + B^2 = p^2$, et, par suite, $\varpi \leqq np$. Conséquemment :

Si $f(z)$ a ses zéros alignés sur une droite Δ, et si M *est l'affixe d'un point, situé sur la perpendiculaire à Δ, passant par l'origine, les zéros de $f^2(z) - M^2 f'^2(z)$ ne sont pas situés sur Δ, mais leurs distances à cette droite ne peuvent être plus grandes que n fois la distance de* M *à l'origine.*

Plus particulièrement encore, si l'on fait coïncider Δ avec l'axe des x, on retrouve le théorème de M. Laguerre.

SOLUTION DE LA QUESTION 1338;

PAR M. E. CESARO.

L'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles; soient α et β deux racines consécutives de cette équation. La dérivée s'annule pour une valeur ω comprise entre α et β; démontrer que cette valeur est comprise entre

$$\frac{\alpha + (n-1)\beta}{n} \text{ et } \frac{(n-1)\alpha + \beta}{n},$$

n désignant le degré de l'équation. (LAGUERRE.)

Pour l'uniformité des développements qui suivent, nous changerons de notation. Soient $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ les racines de l'équation proposée, rangées par ordre de grandeur croissante. Soit r la racine de $f'(z) = 0$, comprise entre c_p et c_{p+1}. A cause de

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - c_1} + \frac{1}{z - c_2} + \frac{1}{z - c_3} + \ldots + \frac{1}{z - c_n},$$

nous devrons avoir

$$\frac{1}{r - c_1} + \frac{1}{r - c_2} + \ldots + \frac{1}{r - c_p}$$
$$= \frac{1}{c_{p+1} - r} + \frac{1}{c_{p+2} - r} + \ldots + \frac{1}{c_n - r}.$$

Si l'on observe que les termes du premier membre ne vont pas en diminuant, tandis que ceux du second membre ne vont pas en augmentant, on peut écrire

$$\frac{p}{r - c_p} \overline{>} \frac{1}{c_{p+1} - r}, \quad \frac{1}{r - c_p} \overline{<} \frac{n - p}{c_{p+1} - r},$$

d'où

$$\frac{1}{n - p} \overline{<} \frac{r - c_p}{c_{p+1} - r} \overline{<} p.$$

A plus forte raison peut-on remplacer les deux limites par $\frac{1}{n-1}$, $n-1$, respectivement, et conclure

$$c_p + \frac{c_{p+1} - c_p}{n} \leqq r \leqq c_{p+1} - \frac{c_{p+1} - c_p}{n}.$$

En d'autres termes, ayant partagé l'intervalle $c_p c_{p+1}$ en segments égaux, on peut affirmer que, dans les segments extrêmes, la fonction dérivée ne s'annule pas. C'est le théorème de M. Laguerre.

Remarque I. — Si l'on suppose plus généralement que z représente la variable complexe $x + iy$, et qu'on ait $c_s = a_s + ib_s$, on peut écrire

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum \frac{1}{z - c_s} = \sum \frac{x - a_s}{\delta_s^2} - i \sum \frac{y - b_s}{\delta_s^2},$$

en désignant par δ_s la distance du zéro c_s au point z. Lorsque z est un zéro de $f'(z)$, on doit avoir simultanément

$$\sum \frac{x - a_s}{\delta_s^2} = 0, \quad \sum \frac{y - b_s}{\delta_s^2} = 0.$$

Ces équations montrent que, si, aux zéros de $f(z)$, on applique des poids inversement proportionnels aux carrés de leurs distances respectives à un zéro P de $f'(z)$, le centre de gravité d'un tel système est précisément P.

Remarque II. — D'après la remarque précédente, étant donnés les zéros de $f(z)$, ceux de $f'(z)$ doivent être situés de telle sorte que, si, par un quelconque d'entre eux, on tire une droite quelconque, celle-ci ne laisse pas tous les zéros de $f(z)$ du même côté. On en déduit, par exemple, que, si les zéros de $f(z)$ sont les sommets d'un polygone convexe, les zéros de $f'(z)$ sont situés à l'intérieur du polygone. Il en est de même des zéros des dérivées suivantes, jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$, dont l'unique

zéro n'est autre que le centre de gravité du polygone. Remarquons encore que, si les zéros de $f(z)$ sont alignés sur une droite, celle-ci contient aussi les zéros de $f'(z)$. Dans ce dernier cas, il est aisé de reconnaître que la propriété signalée par M. Laguerre, pour le cas des zéros alignés sur l'axe des quantités réelles, ne cesse de subsister en général.

Remarque III. — Par rapport à une fonction donnée $f(z)$, à chaque point P correspond un point Q, centre de gravité d'un système de poids, appliqués aux zéros de $f(z)$ avec une intensité qui varie en raison inverse du carré de la distance à P. Nous avons vu que, lorsque P est un zéro de $f'(z)$, le point correspondant Q coïncide avec lui. En général, il existe, entre les affixes z, Z des deux points et leur distance δ, la relation

$$f'(z) = \frac{f(z)}{z - Z} \sum \left(\frac{\delta}{\delta_s}\right)^2,$$

qui donne lieu à plusieurs observations intéressantes.

Remarque IV. — Les résultats précédents n'appartiennent pas exclusivement aux fonctions algébriques. On peut consulter, à ce sujet, notre article : *Remarques sur les fonctions holomorphes*, inséré au *Journal de Battaglini* (1884).

La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Juhel-Rénoy.

ERRATA. — Page 40, ligne 6, *au lieu de* $e^{\epsilon-1}$, *lisez* e^{e^x-1}. Page 42, ligne 7, *au lieu de* $y^{(p)}(1)$, *lisez* $\varphi^{(p)}(1)$. Page 45, ligne 6, en remontant, *au lieu de* $\varepsilon_{r\nu-1}\varepsilon_{r\nu+1}\varepsilon_{r\nu+1}$, *lisez* $\varepsilon_{r_{\nu-1}}\varepsilon_{r_\nu+1}\varepsilon_{r_{\nu+1}}$. Page 46, ligne 12, *au lieu de* ε_2, *lisez* ε_{r_2}. Page 50, ligne 4, *au lieu de* $\frac{s_r}{r}$, *lisez* $(-1)^{r+1}\frac{s_r}{r}$. Page 62, ligne 11, *au lieu de* $-\gamma_1 x^1$, *lisez* $+\gamma_1 x^1$. Page 570 du tome précédent, ligne 9 en remontant, *au lieu de* $(1)_{m+1} - \frac{p}{m}$, *lisez* $(-1)^{m+1}\frac{p}{m}$.

NOTE SUR LA DISCONTINUITÉ DE CERTAINES SÉRIES;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Dans mon Étude sur le théorème d'Abel, publiée en avril 1885 par les *Nouvelles Annales*, j'ai discuté une démonstration d'où il résulterait qu'une série, dont les termes sont fonctions continues de x, varie elle-même nécessairement d'une manière continue avec x, tant qu'elle est convergente. Soient $\varphi(x)$ la somme des n premiers termes, $\psi(x)$ le reste; tant que la série est convergente, sa somme est une fonction déterminée de x,

$$(1) \qquad F(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Or, dit-on, prenons n assez grand, quoique fini, pour que $\psi(x)$ reste, en valeur absolue, moindre qu'un nombre donné ε, aussi petit qu'on veut; $\varphi(x)$, somme d'un nombre fini de fonctions continues de x, est elle-même fonction continue de x, ainsi que F, puisque ψ est négligeable. J'ai dit pourquoi ce raisonnement ne me semble pas concluant. M. Catalan m'adresse à ce sujet les observations suivantes, auxquelles l'autorité du savant Géomètre donne un intérêt incontestable :

« Vous dites, m'écrit M. Catalan, que de l'égalité (1) on ne peut tirer

$$(2) \qquad F(b) = \varphi(b) + \psi(b),$$

b étant la valeur extrême de x. Pourquoi? Contestez-vous que la limite de la somme de deux quantités soit égale à la somme des limites de celles-ci?

» Lorsque de l'égalité (1) on déduit l'égalité (2), *il*

est bien entendu que $\varphi(x)$ varie d'une manière continue de $x < b$, à $x = b$ si, pour $x = b$; $\varphi(x)$ est discontinu, il n'y a plus ni démonstration, ni théorème. C'est ce qui arrive pour la série choisie par vous

$$F(x) = \sum \left(\frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} - \frac{x^{2n}}{2n} \right),$$

où, pour $x < 1$, S_n est égal à $L(1+x) - \varepsilon$, et, pour $x = 1$, à $\frac{3}{2} L(1+x) - \varepsilon'$; vous avez donc appliqué mon (?) théorème à un cas formellement exclu; et, trouvant un résultat inadmissible, vous concluez que le théorème est faux. Est-ce bien raisonné? »

Comme on ne peut guère différer d'avis sur la vérité d'une proposition de Mathématiques, lorsqu'on s'est bien entendu sur les termes dans lesquels elle est formulée, je vais essayer de bien préciser ce que j'ai voulu dire. Assurément, si, pour une valeur quelconque de n, $\varphi(x)$ est une fonction continue de x, comme le demande M. Catalan, $F(x)$ aura nécessairement pour limite $F(b)$ quand x tend vers b. Mais, dans l'énoncé de la proposition que je discutais, je supposais seulement que les termes de $F(x)$ fussent des fonctions continues de x, et je disais précisément que cela n'empêche pas $\varphi(x)$ de présenter cette discontinuité que M. Catalan exclut, et qui entraîne la discontinuité de $F(x)$. Et encore réclamerai-je contre l'épithète de *discontinue* que mon savant maître applique à $\varphi(x)$ dans la série (3) ou dans les séries analogues; tant que n reste fini, $\varphi(x)$ ne présente pas de discontinuité, dans le sens strict du mot. Pour la série (3), $\varphi(x)$ est une fonction entière de degré $4n-1$, c'est-à-dire essentiellement continue; quand x tend vers 1, $\varphi(x)$ varie d'autant plus rapidement que n est plus grand, mais sans discontinuité; quand x est

très voisin de 1, par exemple égal à $1 - \frac{1}{n}$, $F(x)$ est bien égal à $L(1 + x)$, mais $\varphi(x)$ n'en est plus une valeur approchée. En somme, $\varphi(x)$ ne présente pas de caractère de discontinuité avertissant que la série (3) sera discontinue. Ne peut-on craindre que pareil fait ne se présente pour la série d'Abel qui, à la limite, arrive à la région dangereuse des séries semi-convergentes, et ne doit-on pas exiger pour le théorème d'Abel une démonstration absolument rigoureuse?

Mais voici une nouvelle objection, peut-être plus frappante, au raisonnement que j'ai critiqué : c'est que, pour certaines séries, il n'est pas possible d'assigner à n une valeur déterminée telle que $\psi(x)$ reste inférieur à un petit nombre donné ε, lorsque x varie dans les limites pour lesquelles la série est convergente. Considérons la série (3) et un terme u_p, de rang éloigné, dans cette série; ce terme est négatif pour les valeurs de x comprises entre zéro et $\frac{1}{4p^2}$ environ; pour $x = 1 - \frac{a}{p}$, a étant un nombre fini, il est sensiblement égal à $-\frac{1}{2p}(e^{-2a} - e^{-4a})$, c'est-à-dire de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{p}$; pour $x > 1 - \frac{1}{4p^2}$, u_p est positif et tend vers $\frac{1}{4p^2}$ pour $x = 1$. Cela posé, donnons à n une valeur aussi grande qu'on voudra, mais déterminée, et voyons ce que devient $\psi(x)$ quand x croît de 0 à 1 : tant que $1 - x$ n'est pas très petit, $\psi(x)$ est négatif et visiblement très petit en valeur absolue; mais, quand x atteint les valeurs de la forme $1 - \frac{a}{n}$, $\psi(x)$ renferme un grand nombre de termes de grandeur comparable à ceux de même rang dans la série harmonique, et il cesse d'être très petit, et cela tant que x n'a pas atteint la valeur 1, pour laquelle $\psi(x)$, et non $\varphi(x)$, présente une

discontinuité, compatible avec le nombre infini de ses termes; ce sont les valeurs négatives de ψ qui compensent l'excès de $\varphi(x)$ sur $L(1+x)$ quand x tend vers l'unité. Mais pour aucune valeur déterminée de n, $\psi(x)$ ne reste très petit; il ne resterait tel qu'à la condition de faire varier n; quoi qu'on fasse, un des termes de la démonstration que je discute tombe en défaut pour certaines séries, et on doit, ce me semble, toujours être sur ses gardes pour les autres.

SUR LES COMPLEXES LINÉAIRES;

PAR M. E. JAGGI.

Dans le numéro du mois de février dernier des *Nouvelles Annales,* j'ai donné une démonstration géométrique de ce fait, que les normales aux trajectoires d'un solide dont le déplacement est assujetti à cinq conditions forment un complexe linéaire; en voici une démonstration analytique.

1. Je prends pour axe des z l'axe commun à tous les éléments d'hélices trajectoires correspondant à l'instant considéré. Si K est le pas commun à toutes ces hélices, leurs équations pourront s'écrire

$$x^2+y^2=r^2, \quad z=\mathrm{K}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{y}{x};$$

d'où je tire les équations générales de ces courbes

$$(1)\qquad \frac{-dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{\mathrm{K}}.$$

Soient

$$x=az+p,\quad y=bz+q$$

les équations d'une droite quelconque. Les cosinus directeurs de cette droite étant proportionnels à a, b, 1, pour que cette droite soit une normale, on doit avoir

$$a\,dx + b\,dy + dz = 0,$$

c'est-à-dire

$$-ay + bx + K = 0$$

ou, en tenant compte des équations de la droite,

$$aq - bp = K, \tag{2}$$

équation d'un complexe linéaire rapporté à son axe. Donc :

Les normales aux trajectoires de tous les points d'un solide de forme invariable, dont le déplacement est assujetti à cinq conditions, forment à chaque instant un complexe linéaire dont l'axe coïncide avec l'axe instantané de rotation glissant du déplacement, et dont le paramètre est égal au pas commun des hélices trajectoires.

La réciproque, démontrée par M. Picard, s'obtient facilement en intégrant les équations (1) qui résultent de ce que toute droite ($abpq$) du complexe (2) est normale à la courbe (xyz).

2. Je vais maintenant donner quelques nouvelles applications des théorèmes précédemment démontrés.

Considérons un corps solide de forme invariable aux divers points duquel sont appliquées des forces quelconques et supposons d'abord que, par l'action de ces forces, les différents points du solide décrivent des courbes trajectoires. Partons d'une position d'équilibre du corps. Tout déplacement virtuel infiniment petit du corps à partir de cette position sera un déplacement héli-

coïdal pour lequel les normales aux courbes trajectoires formeront un complexe linéaire.

On peut donc énoncer immédiatement le théorème suivant :

Théorème I. — *Si les lignes d'action des forces appliquées aux différents points d'un solide qui décrivent des courbes trajectoires forment un complexe linéaire, le solide sera en équilibre.*

Cette condition est suffisante, mais non pas nécessaire. Le théorème général sera celui-ci :

Théorème II. — *Quand les divers points d'un solide décrivent des courbes trajectoires sous l'action de plusieurs forces qui y sont appliquées, la condition nécessaire et suffisante d'équilibre est que les diverses résultantes des forces appliquées aux différents points du corps appartiennent à un complexe linéaire.*

Ce théorème peut encore s'énoncer ainsi :

On ne trouble pas l'équilibre ou le mouvement d'un solide de forme invariable dont les points décrivent des courbes trajectoires, en appliquant en ses divers points des forces dont les diverses résultantes appartiennent à un complexe linéaire.

3. Si maintenant, sous l'action des forces qui leur sont appliquées, les différents points du solide décrivent des surfaces trajectoires, on sait qu'à chaque instant les normales aux surfaces trajectoires, en tous les points du corps, forment une congruence linéaire (même tome, p. 85) ; par conséquent :

Théorème III. — *Si un corps solide de forme invariable se déplace de manière que ses points décrivent des surfaces trajectoires sous l'action des forces qui*

leur sont appliquées, le solide sera en équilibre toutes les fois que les diverses résultantes des forces appliquées aux divers points du corps appartiendront à une congruence linéaire.

SUR LA LOI DE SUCCESSION DES COEFFICIENTS DANS LA FORMULE DU BINOME;

PAR M. G. FOURET.

Dans le développement de $(a+b)^m$, m désignant un nombre entier positif, le terme qui en a p après lui et $q=m-p$ avant lui peut, comme chacun le sait, s'écrire $\frac{m!}{p!q!}a^p b^q$. Le terme qui en a q après lui et p avant lui est pareillement $\frac{m!}{q!p!}a^q b^p$. Comme il a le même coefficient que le précédent, on en conclut que *les coefficients des termes à égale distance des extrêmes sont égaux.*

En conservant la même forme aux termes du développement, on peut établir immédiatement, comme on va le voir, la loi bien connue de variation des coefficients, sans qu'il y ait de distinction à faire relativement à la parité de l'exposant m.

En effet, le coefficient du terme qui en a $p+1$ après lui, et par conséquent $q-1$ avant lui, étant $\frac{m!}{(p+1)!(q-1)!}$ en le multipliant par $\frac{p+1}{q}$, on en déduit le coefficient du terme suivant. Par suite, pour que ce nouveau coefficient soit supérieur à celui qui le précède, il faut et il suffit que p ne soit pas inférieur à q, c'est-à-dire que le terme auquel il appartient n'ait pas moins de termes

après lui qu'avant lui. Donc, *les coefficients du développement de $(a+b)^m$ vont en croissant jusqu'au milieu de ce développement, pour décroître ensuite, en reprenant les mêmes valeurs dans l'ordre inverse.*

CONSTRUCTION NOUVELLE DES POINTS D'INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE CONIQUE (¹);

PAR M. ERNEST LEBON.

1. Soit un cône de révolution à axe vertical, de sommet f, f' (*fig.* 1), dont la trace horizontale a pour diamètre la droite de front ac. Coupons ce cône selon une ellipse par le plan de bout $aa'b'$. On sait que la projection horizontale de la section est une ellipse dont ab est le grand axe et f un foyer.

Soit une droite mn, $a'b'$ située dans le plan $aa'b'$. D'après la solution connue pour trouver les points d'intersection d'une droite et d'un cône, il faut obtenir la trace horizontale du plan auxiliaire déterminé par la droite et le sommet du cône. Le point a_1, où mn coupe $a'a$, est un point de cette trace. On en construit un second c_1, en menant la droite passant par le sommet f, f' et par le point b', b_1 de mn, $a'b'$. La trace horizontale a_1c_1 du plan auxiliaire coupe celle du cône en i_1 et en j_1 : les droites fi_1 et fj_1 rencontrent mn aux points i et j, projections horizontales des points d'intersection de la droite et du cône donnés.

Remarquons que les points i et j appartiennent à la droite

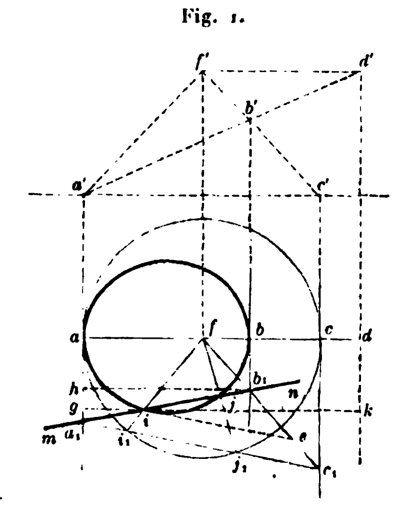
(¹) Exposée à la *Société mathématique de France* (séance du 21 janvier 1885).

mn et à l'ellipse de grand axe *ab*, de foyer *f*, et que les explications précédentes sont applicables au cas où le plan sécant *aa'b'* détermine dans le cône de révolution une hyperbole ou une parabole.

Il résulte des épures précédentes une construction des points d'intersection d'une droite et d'une conique, dont on connaît, en position, un foyer et les sommets situés sur l'axe focal. Voici cette nouvelle construction, qui est plus simple que celles que l'on connaît, notamment dans le cas de la parabole.

2. Soient une droite *mn* (*fig.* 1) (¹) et une *ellipse* définie par son grand axe *ab* et un foyer *f*. On décrit

Fig. 1.



une circonférence *fa*, de centre *f*, ayant pour rayon la distance du foyer *f* à un sommet *a*; elle coupe *ab* en *c*. On mène sur *ab*, aux points *a*, *b*, *c*, les perpendicu-

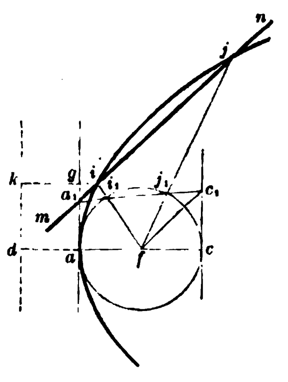
(¹) Les lignes en traits pointillés sont inutiles pour la construction.

laires aa_1, bb_1, cc_1. La droite *mn* coupe aa_1 en a_1 et bb_1 en b_1; la droite fb_1 coupe cc_1 en c_1. La circonférence *fa* est rencontrée par la droite a_1c_1 aux points i_1 et j_1 : les droites fi_1 et fj_1 coupent *mn* aux points *i* et *j* communs à cette droite et à l'ellipse.

La construction est la même dans le cas de l'*hyperbole* définie par son axe transverse et un foyer.

Dans le cas de la *parabole* (*fig.* 2), la construction


Fig. 2.



se simplifie, parce que, le sommet *b* étant rejeté à l'infini, la droite fb_1 devient une parallèle fc_1 à *mn*.

3. La démonstration du n° 1 exige que l'on connaisse la Géométrie descriptive et la Géométrie analytique. Dans ce qui suit, nous donnons une démonstration fondée sur cette propriété que l'on peut démontrer élémentairement : le rapport des distances d'un point d'une conique à un foyer et à la directrice correspondante est constant.

Soiént une droite *mn* (*fig.* 1) et une *ellipse* dont le grand axe est *ab*, dont un foyer est *f* et la directrice correspondante *dk*. Nous obtenons sur *mn* le point *i* par la construction du n° 2.

Pour démontrer que le point i appartient à l'ellipse donnée, nous menons : par le point i la parallèle ie à a_1c_1, coupant fc_1 en e, et la parallèle ig à ab, coupant aa_1 en g; par le point b_1 la parallèle b_1h à ab, coupant aa_1 en h.

Les parallèles ie à a_1c_1, ig à b_1h, dans les triangles $a_1b_1c_1$, a_1b_1h, permettent d'écrire

$$\frac{a_1b_1}{a_1i}=\frac{c_1b_1}{c_1e},\quad \frac{a_1b_1}{a_1i}=\frac{b_1h}{ig};$$

d'où l'on tire, en remarquant que b_1h égale ab,

(1) $$\frac{ab}{ig}=\frac{c_1b_1}{c_1e}.$$

On a de même, dans les triangles cfc_1, i_1fc_1,

$$\frac{c_1b_1}{c_1f}=\frac{cb}{cf},\quad \frac{ii_1}{fi_1}=\frac{c_1e}{c_1f},$$

et, par suite,

(2) $$\frac{c_1b_1}{c_1e}=\frac{cb}{ii_1}.$$

En appelant $2a$ le grand axe et $2c$ la distance des foyers, les égalités (1) et (2) donnent

(3) $$\frac{ii_1}{ig}=\frac{c}{a}.$$

Maintenant prolongeons gi jusqu'à sa rencontre en k avec la directrice dk. Appelant φ et δ les distances if et ik de i à f et à dk, et remarquant que

$$fi_1=a+c,\quad gk=ad=\frac{a}{c}(a+c),$$

nous avons

$$ii_1=a+c-\varphi,\quad ig=\frac{a}{c}(a+c)-\delta,$$

d'où l'on tire, en vertu de l'égalité (3) et après les ré-

ductions,

$$\frac{\varphi}{\delta} = \frac{c}{a}.$$

Cette égalité montre que le point i appartient à l'ellipse considérée.

Pour l'*hyperbole*, la démonstration est analogue à la précédente.

Pour la *parabole*, définie par son sommet a et son foyer f (*fig.* 2), dk étant la directrice, on mène la perpendiculaire ig sur aa_1, et l'on a, d'après la similitude des triangles iga_1 et fcc_1, puis ii_1a_1 et fi_1c_1,

$$\frac{ig}{ia_1} = \frac{fc}{fc_1}, \quad \frac{ii_1}{ia_1} = \frac{fi_1}{fc_1},$$

d'où l'on tire $ii_1 = ig$, et par suite $\varphi = \delta$. Donc le point i appartient à la parabole considérée.

Le cas de la parabole mérite surtout d'être remarqué pour la simplicité de la construction et de la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE.

Les figures réciproques en Statique graphique; par *L. Cremona*, directeur de l'École d'application des Ingénieurs à Rome. Ouvrage précédé d'une Introduction du Dr *Giuseppe Jung*, professeur à l'Institut technique de Milan, et suivi d'un Appendice extrait des Mémoires et des Cours de Statique graphique de *Ch. Saviotti*, professeur à l'École des Ingénieurs à Rome. Traduit par *Louis Bossut*, capitaine du Génie. Gr. in-8, avec atlas de 34 planches, 1885. Prix : 5fr, 50.

La Statique graphique a pour objet l'étude des méthodes qui permettent de résoudre, au moyen de constructions géo-

métriques, les principales questions qui ont trait à l'art de l'Ingénieur. Parmi ces différentes méthodes, l'une des plus fécondes est, sans contredit, celle des diagrammes réciproques, dont on fait le plus grand usage lorsqu'on s'occupe des poutres ou des travures réticulaires.

L'Ouvrage que nous présentons est une traduction d'un célèbre Opuscule de M. Cremona, que l'on a fait suivre d'un Appendice extrait des Mémoires de M. Saviotti, professeur à l'École des Ingénieurs à Rome. Nous demandons aux lecteurs des *Nouvelles Annales de Mathématiques* la permission de leur donner un aperçu sommaire des différentes matières qui sont traitées dans ce travail.

Dans son Opuscule sur les figures réciproques, M. Cremona, après avoir rappelé sommairement les principales propriétés des droites réciproques, des pôles et des plans polaires, donne la définition des polyèdres réciproques, et il démontre que le polygone des forces et le polygone funiculaire peuvent se ramener à deux diagrammes réciproques. Cette façon de considérer ces deux figures lui permet de retrouver de la façon la plus élégante les théorèmes fondamentaux de la Statique graphique.

L'Auteur montre ensuite qu'il existe certaines surfaces polyédriques réciproques, dont les projections sur le plan orthographique ne sont autre chose que les diagrammes réciproques correspondant à certaines classes de travures dites *réticulaires*. Enfin il indique la façon de construire les diagrammes réciproques et, après avoir parlé sommairement de deux méthodes auxiliaires de calcul des travures réticulaires, à savoir : la méthode des sections et la méthode des moments statiques, il termine par plusieurs exemples destinés à bien fixer les idées sur la valeur de la méthode des diagrammes réciproques, appelée aussi *méthode géométrique*.

Comme la lecture de l'Opuscule suppose la connaissance préalable de la théorie des figures réciproques, on a conservé l'excellente Introduction que M. le Dr G. Jung, professeur à l'Institut technique de Milan, a composée pour la troisième édition de l'Ouvrage italien et qui contient la théorie précitée, déduite des propriétés d'un système gauche de forces.

L'Appendice, extrait des travaux de M. Saviotti et des Notes qu'il a bien voulu nous communiquer, se divise en cinq Chapitres.

Dans le Chapitre I, on a traité la question des coniques des forces et des coniques funiculaires par la méthode mécanique et par une méthode purement géométrique, en considérant ces courbes comme les projections de figures réciproques dans l'espace.

Dans le Chapitre II, on a étudié la génération des travures réticulaires strictement indéformables, autrement dit les deux questions suivantes :

1° Étant donné un ensemble de points, comment pourra-t-on les relier au moyen d'une travure réticulaire indéformable?

2° Étant donné un ensemble de barres, ou plusieurs groupes de barres, comment les reliera-t-on d'une façon invariable?

Dans le Chapitre III, on a exposé les différentes méthodes que l'on peut employer pour le calcul des travures réticulaires, et l'on a insisté plus particulièrement sur celles de ces méthodes dont il n'a pas été question dans l'Opuscule, à savoir : la méthode dite de *fausse position* et celle dite du *polygone funiculaire*.

Le Chapitre IV est réservé à l'étude des travures réticulaires strictement indéformables chargées aux nœuds et sur les barres et dont, par conséquent, les différentes pièces sont soumises tout à la fois à des efforts longitudinaux et à des efforts de flexion. Le problème des trois points, dont on développe la solution, permet, dans ce cas, de trouver les actions qu'exercent les différentes barres sur les charnières d'assemblage. Cette détermination permet par suite de trouver les actions qui s'exercent sur les différentes sections des barres.

Enfin, dans le Chapitre V, on traite dans ses différents cas le problème des trois barres qui s'énonce ainsi qu'il suit :

Un corps ou un système indéformable est lié à un autre corps au moyen de trois barres : on se propose de trouver toutes les forces qui sollicitent chacune des trois barres ou, ce qui revient au même, de déterminer les actions qui s'exercent sur tous les nœuds de liaison.

Telles sont, sommairement, les principales questions qui sont traitées dans l'Appendice et qui donnent à l'Ouvrage un caractère d'actualité qui ne peut qu'être apprécié par les personnes désireuses de se tenir au courant des progrès de la Statique graphique.

L. Bossut.

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1885;

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Par les deux foyers d'une ellipse fixe on fait passer une circonférence variable.

1° *A quelle condition doit satisfaire cette ellipse, pour que la circonférence puisse réellement la rencontrer en quatre points, et dans quelle portion du petit axe doit-on placer le centre du cercle pour qu'il y ait effectivement quatre points réels d'intersection?*

2° *En chacun des points d'intersection, on mène les tangentes de l'ellipse. Ces quatre droites forment un quadrilatère. Quel est le lieu des sommets de ce quadrilatère quand le cercle varie?*

3° *Quel est le lieu de l'intersection des côtés de ce quadrilatère avec ceux d'un autre quadrilatère, symétrique du premier par rapport au centre de l'ellipse?*

4° *On considère les tangentes communes au cercle et à l'ellipse. Quel est le lieu de leurs points de contact avec le cercle?*

1° Parmi toutes les circonférences qui passent par les deux foyers F, F', la plus petite est celle qui a pour diamètre FF'. L'ellipse dont le petit axe est égal à FF' est doublement tangente à cette circonférence et remplit la condition de la rencontrer en quatre points réels (confondus deux à deux). Cette ellipse ne peut être rencontrée en quatre points réels par aucune autre

circonférence passant par F et F′; mais, si le petit axe est plus petit que FF′, on a une ellipse satisfaisant à la condition demandée : cette condition est donc $b < c$.

Supposons qu'il en soit ainsi. Les centres des circonférences satisfaisant à la condition demandée occupent la portion du petit axe comprise entre les centres des circonférences qui passent respectivement par FF′ et par l'une des extrémités du petit axe. Appelons a le demi grand axe de l'ellipse. Le rayon de ces circonférences est égal à $\frac{a^2}{2b}$.

Par suite, le segment demandé du petit axe est égal à $2\left(\frac{a^2}{2b} - b\right)$ ou $\frac{c^2 - b^2}{b}$.

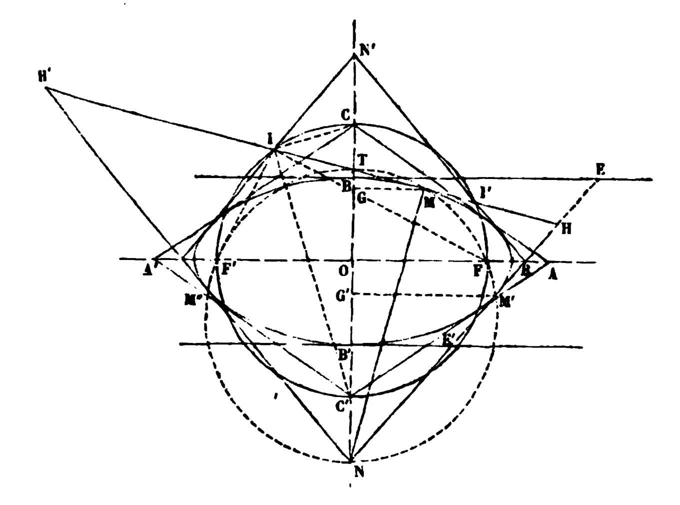
2° Pour résoudre les dernières parties de la question proposée, nous nous appuierons sur cette propriété : *D'un point d'une circonférence qui passe par* F, F′, *on mène des tangentes à l'ellipse : les angles compris entre ces droites ont pour bissectrices les droites qui joignent ce point aux points où la circonférence coupe le petit axe. Si l'on prend un des points* M *où la circonférence coupe l'ellipse, les droites* MT, MN *sont l'une la tangente, l'autre la normale à l'ellipse en* M.

D'après cela les tangentes à l'ellipse, issues de N, touchent cette courbe aux points M′, M″ où elle est coupée par la circonférence MFF′. Ces tangentes rencontrent TM aux points H, H′ qui décrivent une courbe (H) lorsqu'on déplace M sur l'ellipse.

Une tangente TM donne lieu à un seul point N, d'où partent deux tangentes à l'ellipse. Il y a alors sur TM deux points du lieu (H). Il n'y a que ces deux points, puisque deux autres tangentes à l'ellipse ne peuvent se couper sur la tangente TM. La courbe (H), n'étant rencontrée par la droite TM qu'en deux points, est une

conique. Cette conique a évidemment pour axes les axes de l'ellipse.

Prenons la circonférence décrite sur FF' comme diamètre et appelons C, C' les points où elle coupe le petit axe. Les tangentes à l'ellipse, issues de ces points,



forment un parallélogramme. Les côtés opposés de ce parallélogramme donnent des points à l'infini sur (H); donc : *La conique* (H) *est une hyperbole. Les asymptotes de cette hyperbole sont les parallèles menées du centre* O *aux côtés de ce parallélogramme.*

Les sommets A, A' *de ce parallélogramme, situés sur le grand axe de l'ellipse, sont les sommets de l'hyperbole* (H).

La portion CA *de la tangente à l'ellipse, issue de* C *et comprise entre les axes, est égale à la demi-distance focale de* (H).

3° Prenons le point N', symétrique de N par rapport au centre O. Les tangentes à l'ellipse, issues de N', encontrent la tangente MT aux points I, I' qui appar-

tiennent à la courbe demandée dans la troisième partie de la question. Sur TM, il n'y a que ces deux points de cette courbe : donc c'est une conique.

Il est facile de voir que sur l'une des tangentes à l'ellipse, issue de C, les points de cette conique sont C et le point de contact de cette tangente, c'est-à-dire C et l'un des points où l'ellipse est rencontrée par la circonférence CFC'F'. La conique lieu des points I contient donc C, C' et les points de contact des tangentes à l'ellipse issues de ces points. Ces six points appartiennent à la circonférence CFC'F'; donc : *Le lieu des points tels que* I *est la circonférence décrite sur* FF' *comme diamètre.*

Autrement. — Par F, F', I faisons passer une circonférence et appelons, pour le moment, O' son centre. Les droites qui joignent I aux points où elle coupe la droite BB' sont les bissectrices des angles formés par IN', IT : alors $O'T \times O'N'$ est égal au carré du rayon de cette circonférence. On peut écrire alors

$$(OT + OO')(ON' + OO') = \overline{O'F}^2,$$

ou, en développant,

$$OT \times ON' + OO'(OT + ON') + \overline{OO'}^2 = c^2 + \overline{OO'}^2.$$

Mais

$$OT \times ON' = OT \times ON = c^2.$$

La relation précédente donne alors

$$OO'(OT + ON') = 0.$$

Le segment OO' doit donc être nul. Ainsi O' se confond avec O, etc.

On arrive au même résultat si l'on suppose O' au-dessus du grand axe de l'ellipse.

4° La polaire de N, par rapport à l'ellipse, est la per-

pendiculaire M'G' abaissée de M' sur le petit axe BB'. Les points N, B, G', B' forment alors une division harmonique. Menons de ces points des perpendiculaires au petit axe. Ces droites rencontrent la tangente NM' aux points E, M', E' et alors N, E', M', E forment une division harmonique. Le point R étant le milieu de EE', on a

$$RM' \times RN = \overline{RE}^2 = \overline{RE'}^2.$$

Mais

$$RM' \times RN = RF \times RF'.$$

Donc

$$RF \times RF' = \overline{RE}^2 = \overline{RE'}^2.$$

Par suite, E et E' sont les points où NM' est touchée par des circonférences qui passent par F et F', c'est-à-dire que E et E' sont les points de contact d'une tangente commune à ces circonférences et à l'ellipse.

Le point M' *étant arbitraire, on voit que le lieu demandé dans la quatrième partie se compose des tangentes* BE, B'E' *à l'ellipse.*

Autrement. — Menons une tangente commune à l'ellipse et à une circonférence qui passe par F, F'. Soit E le point de contact de cette tangente et de cette circonférence. De ce point menons l'autre tangente à l'ellipse. Les bissectrices des angles compris entre ces deux tangentes sont les droites qui joignent E aux points de rencontre de cette circonférence avec le petit axe. Il résulte de là que la tangente à l'ellipse, qui n'est pas tangente à la circonférence, doit être perpendiculaire à BB', c'est-à-dire qu'elle est la tangente en B ou en B' à l'ellipse, d'où, etc.

Remarques. — 1° On a

$$OT \times ON = c^2.$$

Mais

$$OT \times OG = b^2, \quad ON \times OM' = b^2,$$

donc

$$OG \times OG' = \text{const.}$$

Ainsi :

Le produit des ordonnées des points de rencontre de l'ellipse et d'une circonférence qui passe par F, F' *est constant, quelle que soit cette circonférence.*

2° Le lieu des points tels que I ne dépendant que de la distance focale, on peut, dans la troisième partie de l'énoncé, substituer à l'ellipse donnée une ellipse qui lui est homofocale.

Ou encore l'on peut dire : *Si l'on prend sur le petit axe des points* T, N' *tels que* $OT \times ON' = c^2$, *les points de rencontre tels que* I *des tangentes à l'ellipse restent sur la circonférence décrite sur* FF' *comme diamètre, lorsqu'on fait varier l'ellipse en lui conservant* F *et* F' *comme foyers.*

3° Si d'un point quelconque d'une circonférence qui passe par F, F' on mène des tangentes à l'ellipse, ces droites comprennent entre elles des angles dont les bissectrices passent par les points où cette circonférence coupe le petit axe de l'ellipse. Par suite, *ces tangentes coupent de nouveau cette circonférence en des points qui sont symétriques par rapport à ce petit axe.*

Prenant les symétriques de ces tangentes par rapport au petit axe, on voit que *l'on peut inscrire à la circonférence des quadrilatères qui sont en même temps circonscrits à l'ellipse.* Cette dernière propriété m'a été signalée par l'auteur de la question proposée; il en avait déduit l'énoncé de la quatrième partie de cette question.

SUR L'INTERPOLATION AU MOYEN DES FONCTIONS CIRCULAIRES;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA,
Professeur à l'Université de Coimbra.

I.

Le problème de la détermination de la fonction $f(x)$ qui reçoit les valeurs $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, quand on donne à la variable x les valeurs $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, est indéterminé. On y peut satisfaire au moyen d'une fonction entière, homogène de $\sin x$ et $\cos x$, et nous avons alors la formule (*Cours d'Analyse* de M. Hermite)

$$\begin{aligned} f(\sin x, \cos x) = {} & \frac{\sin(x-a_2)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin(a_1-a_2)\sin(a_1-a_3)\ldots\sin(a_1-a_n)} y_1 \\ & + \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin(a_2-a_1)\sin(a_2-a_3)\ldots\sin(a_2-a_n)} y_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_{n-1})}{\sin(a_n-a_1)\sin(a_n-a_2)\ldots\sin(a_n-a_{n-1})} y_n. \end{aligned}$$

Inversement, $f(\sin x, \cos x)$ étant une fonction entière, homogène du degré $n-1$, nous avons une formule de décomposition d'une fraction en des fractions simples, à savoir

$$\begin{aligned} & \frac{f(\sin x, \cos x)}{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_n)} \\ & = \frac{f(\sin a_1, \cos a_1)}{\sin(a_1-a_2)\sin(a_1-a_3)\ldots\sin(a_1-a_n)} \frac{1}{\sin(x-a_1)} \\ & \quad + \frac{f(\sin a_2, \cos a_2)}{\sin(a_2-a_1)\sin(a_2-a_3)\ldots\sin(a_2-a_n)} \frac{1}{\sin(x-a_2)} \\ & \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nous allons considérer, dans cette Note, le cas où quelques-unes des quantités $a_1, a_2, \ldots$ sont égales, pour

chercher la formule de décomposition et la formule correspondante d'interpolation.

II.

En supposant premièrement $a_1 = a_2$ et en déterminant la somme des deux premiers termes de la formule précédente par le chemin qu'on a l'habitude de suivre dans les questions de cette nature, c'est-à-dire en posant $a_2 = a_1 + \omega$, on a le résultat

$$\begin{aligned}
y = &-\frac{\sin(x-a_1-\omega)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin\omega}\mathrm{F}(a_1)\\
&+\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin\omega}[\mathrm{F}(a_1)+\omega\mathrm{F}'(a_1)+\ldots]\\
&+\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_1-\omega)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin(a_3-a_1)\sin(a_3-a_1-\omega)\ldots\sin(a_3-a_n)}y_3+\ldots,
\end{aligned}$$

où

$$\mathrm{F}(a_1) = \frac{f(a_1)}{\sin(a_1-a_3)\sin(a_1-a_4)\ldots}$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{F}(a_2) = \frac{f(a_2)}{\sin(a_2-a_3)\sin(a_2-a_4)\ldots},$$

et où l'on représente $f(\sin x, \cos x)$ par $f(x)$.

Cette formule donne, en la développant suivant les puissances de ω et en y posant ensuite $\omega = 0$,

$$\begin{aligned}
y = &\cos(x-a_1)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)\mathrm{F}(a_1)\\
&+\sin(x-a_1)\sin(x-a_3)\ldots\sin(x-a_n)\mathrm{F}'(a_1)\\
&+\frac{\sin^2(x-a_1)\sin(x-a_4)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin^2(a_3-a_1)\sin(a_3-a_4)\ldots\sin(a_3-a_n)}f(a_3)\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Cette formule détermine la fonction $f(x)$, étant données les quantités $f(a_1), f'(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots.$

Cela posé, nous allons considérer le cas général. Soit

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k=i} \frac{\begin{bmatrix} \sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_i) \\ \times\sin(x-a_{i+1})\ldots\sin(x-a_n) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \sin(a_k-a_1)\sin(a_k-a_2)\ldots\sin(a_k-a_i) \\ \times\sin(a_k-a_{i+1})\ldots\sin(a_k-a_n) \end{bmatrix}} F(a_k)$$

$$+\sum_{k=i+1}^{k=n} \frac{\begin{bmatrix} \sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_i)\ldots \\ \times\sin(x-a_n) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \sin(a_k-a_1)\sin(a_k-a_2)\ldots\sin(a_k-a_i)\ldots \\ \times\sin(a_k-a_n) \end{bmatrix}} f(a_k),$$

en posant

$$F(a_k) = \frac{f(a_k)}{\sin(a_k-a_{i+1})\sin(a_k-a_{i+2})\ldots}.$$

Si l'on fait maintenant

$$a_2 = a_1+\omega,\quad a_3 = a_1+2\omega,\quad \ldots,$$
$$a_k = a_1+(k-1)\omega,\quad \ldots,\quad a_i = a_1+(i-1)\omega,$$

la première ligne de $f(x)$, que nous appellerons P, prend la forme

$$P = \sum_{k=1}^{k=i}(-1)^{i-k} \frac{\begin{bmatrix} \sin(x-a_1)\sin(x-a_1-\omega)\ldots \\ \times\sin[x-a_1-(i-1)\omega]\ldots \\ \times\sin(x-a_n) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \sin(k-1)\omega\sin(k-2)\omega\ldots \\ \times\sin\omega\sin\omega\ldots \\ \times\sin(i-k)\omega \end{bmatrix}} F[a_1+(k-1)\omega].$$

Donc la limite de P correspondant à $\omega = 0$, que nous appellerons A, sera le coefficient de ω^{i-1} dans le développement de $P \times \omega^{i-1}$ en série, c'est-à-dire

$$A = \sum_{k=1}^{k=i}(-1)^{i-k} \left(\frac{d^{i-1} \dfrac{\begin{bmatrix} \sin(x-a_1)\sin(x-a_1-\omega)\ldots \\ \times\sin[x-a_1-(i-1)\omega]\omega^{i-1} \\ \times F[a_1+(k-1)\omega] \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \sin(k-1)\omega\sin(k-2)\omega\ldots \\ \times\sin\omega\sin\omega\sin2\omega\ldots \\ \times\sin(i-k)\omega \end{bmatrix}}}{d\omega^{i-1}} \right)_{\omega=0}$$

$$\times\sin(x-a_{i+1})\ldots\sin(x-a_n).$$

On doit remarquer que, dans cette expression, on ne doit pas écrire $\sin(x - a_1)$ quand $k = 1$; on ne doit pas écrire $\sin(x - a_1 - \omega)$ quand $k = 2$, etc.

Pour obtenir A, nous employons la formule de Leibnitz, et nous avons

$$\begin{aligned} A = \sum_{k=1}^{k=i} (-1)^{i-k} \frac{\sin(x-a_1)}{(k-1)!\,(i-k)!} \\ \times \Big\{ \sin(x-a_1-\omega) + \sin(x-a_1-2\omega) + \ldots \\ + \sin[x-a_1-(i-1)\omega] + \frac{(k-1)\omega}{\sin(k-1)\omega} \\ + \frac{(k-2)\omega}{\sin(k-2)\omega} + \ldots + \frac{\omega}{\sin\omega} + \frac{\omega}{\sin\omega} + \ldots \\ + \frac{(i-k)\omega}{\sin(i-k)\omega} + F[a_1 + (k-1)\omega] \Big\}^{(i-1)} \\ \times \sin(x-a_{l+1}) \ldots \sin(x-a_n) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} A = \sum_{k=1}^{k=i} (-1)^{i-k} \frac{(i-1)!}{(i-k)!} \sin(x-a_1)\sin(x-a_{l+1})\ldots\sin(x-a_n) \\ \times \Big\{ \sum (-1)^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda} \frac{1^\alpha . 2^\beta \ldots (i-1)^\lambda}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \\ \times \sin\left(x-a_1+\alpha\frac{\pi}{2}\right)\ldots\sin\left(x-a_1+\lambda\frac{\pi}{2}\right) \\ \times \frac{(k-1)^{u-1}F^{(n)}(a_1)}{u!\,p!\,q!\ldots m!} \left[\frac{(k-1)\omega}{\sin(k-1)\omega}\right]^{(p)}_{\omega=0} \ldots \left[\frac{(i-k)\omega}{\sin(i-k)\omega}\right]^{(m)}_{\omega=0} \Big\}, \end{aligned}$$

où $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, u, p, q, \ldots, m$ représentent toutes les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda + u + p + q + \ldots + m = i - 1.$$

D'un autre côté, nous avons

$$\left[\frac{d^p(x \operatorname{coséc} x)}{dx^p}\right]_{x=0} = 2(2^{p-1} - 1)B_{p-1}$$

quand p est un nombre pair, et

$$\left[\frac{d^p(x \operatorname{coséc} x)}{dx^p}\right]_{x=0} = 0$$

quand p est un nombre impair, en représentant par B_{p-1} les nombres de Bernoulli. Donc

$$A = \sum X \sin(x - a_1) \sin\left(x - a_1 + \alpha\frac{\pi}{2}\right) \cdots \times \sin\left(x - a_1 + \lambda\frac{\pi}{2}\right) \sin(x - a_{i+1}) \ldots \sin(x - a_n),$$

où

$$X = (-1)^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda+i-k} \times \frac{2^{i-1}(i-1)!\,(k-1)^{u-1}.1^{\alpha}.2^{\beta}\ldots(i-1)^{\lambda} B_{p-1} B_{q-1}\ldots B_{m-1}}{(i-k)!\,\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,u!\,p!\,q!\ldots m!} \times (k-1)^{p}(k-2)^{q}\ldots 1.1\ldots(i-k)^{m} \times (r^{p-1}-1)(r^{q-1}-1)\ldots(r^{m-1}-1)\,F^{(n)}(a_1),$$

en donnant à α, β, γ, ..., λ, u, p, q, ..., m, k toutes les valeurs entières et positives qui vérifient l'équation

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda + u + p + q + \ldots + m = k - 1,$$

où k ne peut pas être supérieur à i, et où p, q, ..., m doivent être des nombres pairs.

En appelant B la limite correspondant à $\omega = 0$ de la deuxième partie de l'expression de $f(x)$, on peut écrire

$$B = \sum_{k=i+1}^{k=n} \frac{\sin^i(x - a_1) \sin(x - a_{i+1}) \ldots \sin(x - a_n)}{\sin^i(a_k - a_1) \sin(a_k - a_{i+1}) \ldots \sin(a_k - a_n)} f(a_k).$$

En substituant les expressions de A et B que nous venons d'obtenir dans la formule

$$f(x) = A + B,$$

on a la fonction $f(x)$ qui prend les valeurs données

$$f(a_1),\ f'(a_1),\ f''(a_1),\ \ldots,\ f^{(i)}(a_1),$$
$$f(a_{i+1}),\ f(a_{i+2}),\ \ldots,\ f(a_n).$$

Avec un simple changement de notation, en supposant que les fonctions données sont

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots,\ f^{(i)}(a),$$
$$f(b_1),\ f(b_2),\ f(b_3),\ \ldots,\ f(b_n),$$

on a

$$A = \sum X \sin(x-a)\sin\left(x-a+\alpha\frac{\pi}{2}\right)\cdots$$
$$\times \sin\left(x-a+\lambda\frac{\pi}{2}\right)\sin(x-b_1)\ldots\sin(x-b_n),$$
$$B = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sin^i(x-a)\sin(x-b_1)\ldots\sin(x-b_n)}{\sin(b_k-a)\sin(b_k-b_1)\ldots\sin(b_k-b_n)} f(a_k).$$

En posant

$$b_2 = b_1+\omega,\quad b_3 = b_1+2\omega,\quad \ldots,\quad b_j = b_1+(j-1)\omega$$

dans les formules précédentes, on trouve la formule qui correspond au cas où sont données les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{l} f(a),\quad f'(a),\quad f''(a),\quad \ldots, f^{(i)}(a),\\ f(b_1),\quad f'(b_1),\quad f''(b_1),\quad \ldots, f^{(j)}(b_1),\\ f(b_{j+1}), f(b_{j+2}), f(b_{j+3}), \ldots, f(b_n). \end{array}$$

Considérons maintenant le cas général. Si l'on donne les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{l} f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(i)}(a),\\ f(b), f'(b), f''(b), \ldots, f^{(j)}(b),\\ \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots,\\ f(e), f'(e), f''(e), \ldots, f^{(m)}(e), \end{array}$$

et si l'on cherche la fonction $f(x)$, on peut employer la formule suivante

$$f(x) = A + B + C + \ldots,$$

où

$$A = \sum X \sin(x-a)\sin\left(x-a+\alpha\frac{\pi}{2}\right)\cdots$$
$$\times \sin\left(x-a+\lambda\frac{\pi}{2}\right)\sin^j(x-b)\sin^l(x-c)\ldots\sin^m(x-e),$$
$$B = \sum X_1 \sin^i(x-a)\sin(x-b)\sin\left(x-b+\alpha\frac{\pi}{2}\right)\cdots$$
$$\times \sin\left(x-b+\lambda\frac{\pi}{2}\right)\sin^l(x-c)\ldots\sin^m(x-e),$$
$$C = \sum X_2 \sin^i(x-a)\sin^j(x-b)\sin(x-c)\sin\left(x-c+\alpha\frac{\pi}{2}\right)\cdots$$
$$\times \sin\left(x-c+\lambda\frac{\pi}{2}\right)\ldots\sin^m(x-e),$$

....

et où les quantités X_1, X_2, ... dérivent de X par le changement de i en j et de $F(a)$ en $F_1(b)$ pour X_1, et de i en l et de $F(a)$ en $F_2(c)$ pour X_2, etc., étant

$$F(a) = \frac{f(a)}{\sin^j(a-b)\sin^l(a-c)\ldots\sin^m(a-e)},$$

$$F_1(b) = \frac{f(b)}{\sin^i(b-a)\sin^l(b-c)\ldots\sin^m(b-e)},$$

....

Ainsi les quantités α, β, ..., λ, u, p, ..., m, k représentent les solutions de l'équation

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda+u+p+q+\ldots+m=k-1,$$

k étant inférieur à $i+1$ en X, à $j+1$ en X_1, à $l+1$ en X_2, etc.

Nous devons remarquer qu'en A on ne doit pas écrire $\sin(x-a)$ dans le terme correspondant à $k=1$, on ne doit pas écrire $\sin\left(x-a+\alpha\frac{\pi}{2}\right)$ dans le terme correspondant à $k=2$, etc. La même chose arrive en B, C, ... relativement à b, c, ...

Nous devons encore remarquer que le nombre des quantités α, β, ..., λ est $i-1$ en A, mais que, quand $k=2$, manque β; quand $k=3$, manque γ, etc. On doit faire la même observation à l'égard de B, C, ... Le nombre des quantités p, q, ..., m est $i-1$.

Enfin, quand quelqu'une des quantités α, β, ..., p, q, ..., $k-1$, $i-k$, u est nulle, le facteur correspondant ne doit pas exister dans la formule.

Les formules que nous venons de trouver résolvent la question d'interpolation proposée, c'est-à-dire qu'elles déterminent une fonction circulaire, qui prend, elle et ses dérivées, des valeurs données. Nous allons donc considérer maintenant la décomposition de la fraction correspondante.

III.

Soit $f(\sin x, \cos x)$ une fonction entière, homogène du degré $i+j+l+\ldots+m-1$. La formule de décomposition qui résulte de la formule précédente est

$$\frac{f(\sin x, \cos x)}{\sin^i(x-a)\sin^j(x-c)\ldots\sin^m(x-e)}$$
$$= \frac{A_1}{\sin(x-a)} + \frac{A_2\cot(x-a)}{\sin(x-a)} + \ldots + \frac{A_i\cot^{i-1}(x-a)}{\sin(x-a)}$$
$$+ \frac{B_1}{\sin(x-b)} + \frac{B_2\cot(x-b)}{\sin(x-b)} + \ldots + \frac{B_j\cot^{j-1}(x-b)}{\sin(x-b)}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et nous connaissons les coefficients $A_1, A_2, A_3, \ldots, B_1, B_2, \ldots$.

Nous allons indiquer rapidement deux autres méthodes pour trouver les coefficients précédents, analogues à celles employées dans la décomposition des fractions rationnelles.

En posant

$$\varphi(x) = \sin^j(x-b)\sin^l(x-c)\ldots\sin^m(x-e),$$

nous avons

$$\frac{f(\sin x, \cos x)}{\varphi(x)} = A_1\sin^{i-1}(x-a)$$
$$+ A_2\cos(x-a)\sin^{i-2}(x-a) + \ldots$$
$$+ A_i\cos^{i-1}(x-a) + K\cos^i(x-a).$$

Cette formule donne

$$A_i = \frac{f(\sin a, \cos a)}{\varphi(a)}.$$

En la différentiant, on trouve le résultat

$$\frac{d\,\frac{f(\sin x, \cos x)}{\varphi(x)}}{dx} = (i-1)A_1\sin^{i-2}(x-a)\cos(x-a) + \ldots$$
$$+ A_{i-1}\cos^{i-1}(x-a)$$
$$+ (i-1)A_i\cos^{i-2}(x-a)\sin(x-a) + \ldots,$$

qui donne

$$A_{i-1} = \frac{d\dfrac{f(\sin a, \cos a)}{\varphi(a)}}{da}.$$

De la même manière on trouve les autres coefficients en continuant les différentiations.

On peut aussi calculer les coefficients A_1, A_2, ... au moyen des équations qu'on obtient en égalant les coefficients des mêmes puissances de h dans l'identité suivante :

$$\begin{aligned} f(\sin a, \cos a) &+ \frac{df}{da}h + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{da^2}h^2 + \ldots \\ &= (A_1 \sin^{i-1} h + A_2 \cos h \sin^{i-2} h + \ldots + A_i \cos^{i-1} h) \\ &\quad \times [\varphi(a) + h\varphi'(a) + \tfrac{1}{2}h^2\varphi''(a) + \ldots], \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} f(\sin a, \cos a) &= A_i\, \varphi(a), \\ f'(\sin a, \cos a) &= A_{i-1}\, \varphi(a) + A_i\, \varphi'(a), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Les formules précédentes appliquées au Calcul intégral donnent une formule de réduction d'intégrales.

En effet, au moyen de ces formules, on réduit l'intégration des fractions

$$\frac{f(\sin x, \cos x)}{\sin^i(x-a)\sin^j(x-b)\ldots},$$

$f(\sin x, \cos x)$ étant une fonction entière, homogène du degré $i + j + \ldots + m - 1$, à l'intégration des fonctions de la forme

$$\frac{\cos^t(x-a)}{\sin^{t+1}(x-a)},$$

qui sont le sujet des formules de réduction qu'on trouve dans tous les Traités de Calcul intégral.

On peut encore employer, pour l'intégration de cette fraction, la formule

$$\int \frac{\cos^t(x-a)}{\sin^{t+1}(x-a)}\,dx = -\int \frac{\cot^t(x-a)}{\sqrt{1+\cot^2(x-a)}}\,d\cot(x-a).$$

NOTE SUR LA SYMÉDIANE (¹);

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. Je ferai, dans ce qui suit, usage de deux définitions proposées par M. Neuberg

1° Étant donné un point dans le plan d'un triangle, on joint ce point aux trois sommets du triangle et l'on prend les symétriques des droites ainsi menées par rapport aux bissectrices correspondantes des angles du triangle. Les trois droites ainsi construites concourent en un même point qui est dit *transformé isogonal* du premier par rapport au triangle considéré.

Il est bien évident que ce genre de corrélation entre deux points est réciproque.

Ainsi, l'orthocentre (point de rencontre des hauteurs) et le centre du cercle circonscrit sont *conjugués isogonaux*; de même, le centre de gravité et le centre des symédianes, ou point de Lemoine.

Par conséquent, toute propriété générale de la transformation isogonale conduira à une propriété du centre des symédianes.

Exemples :

Si une conique est inscrite dans un triangle, ses foyers sont conjugués isogonaux par rapport à ce triangle.

La propriété qui résulte de là pour le centre des symédianes a été signalée par M. E. Lemoine (²).

(¹) Voir *Nouvelles Annales*, 3ᵉ série, t. II, p. 450, et t. III, p. 25.
(²) *Voir* notre deuxième Note, p. 27.

Les pieds des perpendiculaires abaissées de deux points, conjugués isogonaux par rapport à un triangle, sur les côtés de ce triangle, sont sur un cercle qui a pour centre le milieu de la distance qui sépare ces deux points.

La précédente propriété a donc lieu d'une part pour le centre de gravité et le centre des symédianes, de l'autre, pour l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit; dans ce second cas, le cercle n'est autre que le cercle des neuf points.

Le centre du cercle inscrit est son propre conjugué isogonal. Tout point du cercle circonscrit a son conjugué isogonal à l'infini, d'où résulte qu'*une conique inscrite dans un triangle et ayant un foyer sur le cercle circonscrit à ce triangle ne peut être qu'une parabole.*

La méthode fort élégante par laquelle M. Astor (¹) a déduit les propriétés des courbes unicursales du quatrième ordre de celles des coniques est une transformation isogonale.

2. Voici maintenant la seconde définition de M. Neuberg :

2° Étant donné un point dans le plan d'un triangle, on joint ce point aux trois sommets du triangle; les droites ainsi menées déterminent sur les côtés du triangle trois points dont on prend les symétriques par rapport aux milieux des côtés correspondants; on joint enfin ces trois nouveaux points aux sommets opposés; les trois droites ainsi obtenues concourent en un même point qui est dit *transformé isotomique* du premier par rapport au triangle considéré.

(¹) *Nouvelles Annales*, 3ᵉ série, t. III, p. 181.

Comme le précédent, ce genre de corrélation est réciproque.

Le centre du cercle inscrit a pour conjugué isotomique le point que nous avons appelé ailleurs le centre des *anti-bissectrices* (1). Le centre de gravité est son propre conjugué isotomique.

Grâce à cette définition, nous pourrons énoncer très simplement le théorème suivant, qui vient de nous être communiqué (2) par M. R. Tucker, de Londres :

Le conjugué isotomique de l'orthocentre d'un triangle est le centre des symédianes du triangle formé par les parallèles aux côtés de ce triangle, menées respectivement par ses trois sommets.

M. Tucker a en outre remarqué que, si l'on considère une série de triangles inscrits les uns dans les autres et tels que les sommets de chacun d'eux soient les milieux des côtés de celui qui le précède, c'est-à-dire tels que le centre des symédianes de chacun d'eux dérive de l'orthocentre de celui qui lui est inscrit, ainsi qu'il a été dit dans le théorème précédent, *les centres des symédianes de tous ces triangles sont en ligne droite.*

D'ailleurs la limite de ces triangles est un point qui est leur centre de gravité commun; donc, *l'axe qui contient les centres des symédianes de tous ces triangles passe par leur centre de gravité commun.*

Nous pourrons encore énoncer ainsi ce résultat :

Le centre de gravité, le centre des symédianes et le conjugué isotomique de l'orthocentre d'un triangle sont en ligne droite.

---

(1) *Journal de Mathématiques élémentaires*, t. IV, p. 158.
(2) La rédaction de cette Note remonte au mois de mai 1884.

3. Soit K un point donné dans le plan d'un triangle ABC. Menons par le point K une droite $A'B'C'$ coupant le côté BC au point A', le côté AC au point B' et le côté AB au point C'. Il existe sur la droite ainsi menée deux points M et M_1, centres des moyennes harmoniques du second ordre des points A', B', C', par rapport à l'origine K.

On sait que, lorsqu'on fait pivoter la droite $A'B'C'$ autour du point K, les points M et M_1 se déplacent sur une conique circonscrite au triangle ABC, et qui est dite *polaire conique* du point K, par rapport au triangle ABC.

On sait en outre qu'en chaque sommet la tangente à cette conique est conjuguée harmonique de la droite qui joint ce sommet au point K, par rapport aux côtés adjacents.

Dès lors, si le point K se confond avec le centre des symédianes, on voit, d'après un théorème énoncé dans notre deuxième Note sur la symédiane, que les tangentes à la polaire conique du point K aux points A, B, C se confondent avec les tangentes au cercle circonscrit. Cette polaire conique, ayant en commun avec ce cercle trois points et les tangentes en ces points, se confond avec lui; par suite :

La polaire conique du point de Lemoine d'un triangle par rapport à ce triangle est le cercle circonscrit au triangle.

Or, d'après une propriété bien connue, si le point M est centre des moyennes harmoniques du second ordre des points A', B', C', par rapport à l'origine K, ce point K est centre des moyennes harmoniques du premier ordre des points A', B', C', par rapport à l'origine M.

De là ce théorème :

Si l'on prend sur le cercle circonscrit à un triangle ABC *un point* M *quelconque, et si l'on joint ce point* M *au point de Lemoine* K *du triangle* ABC, *la droite* MK *coupant les côtés du triangle aux points* A', B', C', *le point* K *est le centre des moyennes harmoniques des points* A', B', C' *par rapport à l'origine* M.

C'est-à-dire que l'on a, en tenant compte des signes,

$$\frac{3}{MK} = \frac{1}{MA'} + \frac{1}{MB'} + \frac{1}{MC'}.$$

4. Nous rappellerons maintenant un théorème que nous avons démontré dans les *Nouvelles Annales* (3e série, t. II, p. 256) et qui s'énonce ainsi :

Une corde AB *d'une courbe quelconque est vue d'un point fixe* O *sous un angle constant. Si la corde* AB *touche son enveloppe au point* E, *et si les tangentes à la courbe aux points* A *et* B *se coupent en* T, *les droites* OT *et* OE *sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle* AOB.

Si la courbe considérée est une conique et si le point O est son centre, la droite OT passe par le milieu de AB; par suite la droite OE est symédiane du triangle AOB, et l'on a ce théorème :

Si une corde AB *d'une conique est vue du centre* O *de cette conique sous un angle constant, on a le point* E *où cette corde touche son enveloppe, en prenant la symédiane* OE *du triangle* AOB.

Lorsque l'angle AOB est droit, la symédiane OE est perpendiculaire sur AB. Dès lors, toutes les normales à l'enveloppe de AB passant par le point O, cette enve-

loppe est un cercle de centre O. On retrouve ainsi un théorème bien connu.

5. Prenons une conique rapportée à ses deux diamètres conjugués égaux (Ox et Oy),

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

La polaire d'un point P (α, β), par rapport à cette conique, a pour équation

$$\alpha x + \beta y = a^2.$$

Cette droite coupant Ox en A, Oy en B, on a

$$\text{OA} = \frac{a^2}{\alpha}, \quad \text{OB} = \frac{a^2}{\beta}.$$

Si PH et PK sont les distances respectives du point P à Ox et à Oy, on a, θ étant l'angle des axes,

$$\text{PH} = \beta \sin\theta, \quad \text{PK} = \alpha \sin\theta;$$

par suite,

$$\frac{\text{PH}}{\text{PK}} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\text{OA}}{\text{OB}},$$

ce qui montre ([1]) que la droite OP est symédiane du triangle OAB. Donc :

La droite qui joint un point quelconque au centre d'une conique est symédiane du triangle formé par la polaire de ce point, relativement à cette conique, avec les deux diamètres conjugués égaux de la conique.

6. Si les points A et B ont respectivement pour inverses par rapport au point O les points A′ et B′, les droites AB et A′B′ sont antiparallèles, par rapport à l'angle AOB; par suite, la médiane du triangle OAB, issue de O, se confond avec la symédiane du triangle OA′B′ et *vice versa*.

([1]) Voir *Nouvelles Annales*, 3e série, t. II, p. 451, théorème II.

Cette remarque permet d'obtenir, par la méthode d'inversion, des propriétés de la symédiane.

Par exemple, l'exercice IV (3ᵉ série, t. II, p. 463) de notre première Note sur la symédiane conduit à la propriété suivante :

Les cercles décrits sur AB *et sur* AC *comme cordes, et ayant respectivement en* B *et en* C *des tangentes parallèles à la symédiane du triangle* ABC, *issue de* A, *se coupent sur la médiane issue du même sommet.*

Autre exemple :

Prenons sur les côtés AB et AC d'un triangle les points B′ et C′ inverses respectivement de B et de C, par rapport à A. La symédiane du triangle ABC, issue de A, passe, d'après ce qui vient d'être dit, par le milieu M′ de B′C′. Par B′ menons une parallèle à AC, par C′ une parallèle à AB; ces droites se coupent en D′ sur AM′ et l'on a

$$AD' = 2AM'.$$

L'inverse de la droite B′D′ est le cercle qui passe par A et B et qui est tangent en A à AC; l'inverse de C′D′ est le cercle qui passe par A et C et qui est tangent en A à AB. Ces deux cercles se coupent en D, point inverse de D′, par rapport à A; ce point se trouve, par suite, sur la droite AM′D′ symédiane de ABC. Soit M le point (inverse de M′) où cette droite coupe le cercle circonscrit à ABC. Puisque $AD' = 2AM'$, il en résulte que $AD = \frac{AM}{2}$.

De là ces théorèmes :

1° *Le cercle passant par les sommets* A *et* B *et tangent en* A *au côté* AC, *et le cercle passant par les sommets* A *et* C *et tangent en* A *au côté* AB, *se coupent en* D *sur la symédiane issue de* A.

2° *Si cette symédiane coupe en* M *le cercle circonscrit au triangle* ABC, *le point* D *est le milieu de* AM.

On sait, d'ailleurs, que le point M est le centre harmonique des points B et C relativement au point A, et que les tangentes au cercle circonscrit à ABC en A et en M se coupent sur BC.

On voit, par les exemples précédents, les services que peut rendre la méthode d'inversion pour trouver de nouvelles propriétés de la symédiane.

7. Nous énoncerons enfin le théorème suivant facile à démontrer :

Prenant sur le côté BC *les points* H *et* I *tels que* AH *soit parallèle à la tangente en* B *au cercle circonscrit à* ABC, *et que* AI *soit parallèle à la tangente en* C *à ce cercle, si par le point* H *on tire une parallèle à* AB, *et par le point* I *une parallèle à* AC, *les droites ainsi menées se coupent sur la symédiane issue de* A.

SCOLIES POUR UN THÉORÈME DE FERMAT;

PAR M. S. RÉALIS,
Ingénieur à Turin.

THÉORÈME. — *Si le nombre p, compris dans la forme linéaire* $4q+1$, *est premier, ou composé de facteurs premiers de cette forme, p est la somme de deux carrés.*

Dans la démonstration qu'il a donnée, le premier, de cet admirable théorème de Fermat (¹), Euler a signalé

(¹) *Voir* les *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg*, t. IV, p. 3, et t. V, p. 3.

ce corollaire, que : *p étant comme il vient d'être dit, le nombre $q = \frac{p-1}{4}$ est la somme de deux nombres triangulaires* (dont l'un peut être nul).

En effet, dit Euler, le double de p est la somme de deux carrés impairs, et l'on peut poser

$$8q + 2 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2,$$

ce qui donne

$$q = \frac{a^2 + a}{2} + \frac{b^2 + b}{2}.$$

A ces importantes propositions de Fermat et d'Euler on peut ajouter les remarques suivantes, qui leur servent de complément.

1° Un nombre donné $p = 4q + 1$ étant la somme de deux carrés x^2, y^2, on peut poser, en nombres entiers a, b, x, y,

$$a + b + 1 = x, \quad a - b = y,$$

et toutes les solutions entières de l'équation indéterminée

$$x^2 + y^2 = p$$

seront fournies par l'identité

$$(a + b + 1)^2 + (a - b)^2 = 4\left(\frac{a^2 + a}{2} + \frac{b^2 + b}{2}\right) + 1,$$

c'est-à-dire

$$(a + b + 1)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + a + b^2 + b) + 1,$$

en attribuant à a et b des valeurs convenables (à savoir, des valeurs entières telles que le second membre de l'égalité se réduise à la valeur de p).

La détermination des deux carrés en lesquels se décompose p se trouve ainsi ramenée, d'une manière directe, à la détermination des deux nombres triangulaires en lesquels se décompose q.

Il est facile de voir que cela a lieu lors même que p

renfermerait des facteurs premiers de la forme $4q+3$, pourvu que chaque facteur de cette espèce soit élevé à une puissance paire, et que p renferme au moins un facteur premier $4q+1$ plus grand que l'unité. En ce cas, x et y ne seront plus premiers entre eux.

Pour $p = 45 = 3^2.5$, par exemple, on a, en prenant $a=4$, $b=1$,

$$6^2+3^2 = 4(10+1)+1 = 45.$$

2° Si un nombre donné p, impair, ou double d'un impair, est décomposable en deux carrés premiers entre eux, en sorte que l'on ait

$$p = x^2+y^2,$$

les racines x, y des carrés composants seront exprimées par le système de formules

$$x = p - \left(\frac{m^2-m}{2} + \frac{n^2-n}{2}\right),$$
$$y = p - \left(\frac{m^2-m}{2} + \frac{n_2+n}{2}\right),$$

m et n étant deux entiers convenablement déterminés.

Prenant, pour fixer les idées, les valeurs de x, y, m, n avec le signe positif, on énonce ce résultat avec plus de précision en disant que, dans les circonstances indiquées, *la racine $x > y$ est égale au nombre p, diminué de la somme de deux nombres triangulaires, et la racine y est égale au même nombre p, diminué de la somme de deux nombres triangulaires, dont l'un est égal au plus grand des triangulaires précédents, et l'autre est consécutif à l'autre triangulaire précédent.* A quoi il y a lieu d'ajouter que *les nombres m, n sont tous deux impairs, ou tous deux pairs, selon que p est lui-même impair, ou le double d'un impair.*

Exemples :

$$p = 5;\quad \begin{cases} m = 3, \\ n = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 - (3 + 0) = 2, \\ y = 5 - (3 + 1) = 1; \end{cases}$$

$$p = 10;\quad \begin{cases} m = 4, \\ n = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 10 - (6 + 1) = 3, \\ y = 10 - (6 + 3) = 1; \end{cases}$$

$$p = 13;\quad \begin{cases} m = 5, \\ n = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 13 - (10 + 0) = 3, \\ y = 13 - (10 + 1) = 2; \end{cases}$$

$$p = 17;\quad \begin{cases} m = 5, \\ n = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 17 - (10 + 3) = 4, \\ y = 17 - (10 + 6) = 1; \end{cases}$$

$$p = 25;\quad \begin{cases} m = 7, \\ n = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 25 - (21 + 0) = 4, \\ y = 25 - (21 + 1) = 3; \end{cases}$$

$$p = 26;\quad \begin{cases} m = 6, \\ n = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 26 - (15 + 6) = 5, \\ y = 26 - (15 + 10) = 1; \end{cases}$$

....

3° Soit p un nombre impair résultant de l'addition de deux carrés x^2, y^2, premiers entre eux.

On aura, en ajoutant $2x^2$ à la valeur de p,

$$p + 2x^2 = 3x^2 + y^2,$$

où le second membre, en y supposant y premier avec 3, représente un nombre appartenant à la forme linéaire $6u + 1$. Cela résulte d'un autre théorème de Fermat, démontré par Euler. La supposition de y premier avec 3 n'a ici rien d'arbitraire, vu que, x et y n'ayant pas de facteur commun, l'un de ces nombres peut toujours être supposé premier avec un nombre premier donné.

Nous pouvons donc poser

$$p + 2x^2 = 6u + 1,$$

c'est-à-dire

$$x^2 = 3u - \tfrac{1}{2}(p - 1),$$

et nous conclurons de là ce corollaire, que : *selon que le nombre considéré p, diminué de l'unité, est ou n'est pas divisible par* 3, *l'un des carrés en lesquels se décompose p est ou n'est pas divisible par* 9.

L'utilité de cette proposition est évidente, lorsqu'on se propose de déterminer, par des essais successifs, les deux carrés dont la somme doit former le nombre considéré.

4° Il est visible que des remarques analogues à la précédente s'appliqueront utilement, en certains cas, à des nombres que l'on sait être décomposables en carrés selon des formes quadratiques autres que celle dont il vient d'être question.

Qu'il s'agisse, par exemple, de satisfaire à l'équation indéterminée

$$p = 2x^2 + y^2$$

par des valeurs de x et y premières entre elles, p étant un nombre donné, dont tous les facteurs premiers sont de la forme $8q + 1$. L'équation est toujours possible, comme on sait, et y sera nécessairement un nombre impair, x un nombre pair.

Pour assigner une condition qui assujettisse d'une manière plus spéciale la valeur de x, mettons la proposée sous la forme

$$p + x^2 = 3x^2 + y^2.$$

Nous en inférerons, en supposant y premier avec 3, l'existence d'une relation telle que

$$p + x^2 = 6u + 1,$$

c'est-à-dire

$$x^2 = 6u - (p - 1),$$

d'où nous conclurons sur-le-champ que x admettra ou n'admettra pas le diviseur 3, selon que $p - 1$ admet ou n'admet pas ce diviseur.

Nous avons supposé y premier avec 3; quand il en est autrement, x est nécessairement premier avec 3.

Soit pris, comme application,

$$p = 2689 = 8.336 + 1.$$

Le nombre $p-1$ étant divisible par 3, et x devant être un multiple pair de 3, les valeurs de x à essayer, pour opérer la décomposition demandée, devront être prises dans la suite 6, 12, 18,...; d'après cela, on reconnaîtra aussitôt que la valeur $x=12$, à laquelle correspond $y=49$, satisfait à la question. On a, en effet,

$$2689 = 2.12^2 + 49^2.$$

Le nombre p ainsi décomposé étant premier, on est assuré qu'il n'y a pas d'autre solution.

Les nombres $p=8q+1$ que nous venons de considérer appartiennent, comme cas particuliers, à la classe des nombres $4q+1$ dont il a été question plus haut; ils admettent par conséquent, en même temps que la représentation par la forme $2x^2+y^2$, la représentation par la forme x^2+y^2. C'est ainsi que, pour $p=2689$, on a, outre l'égalité déjà écrite, l'égalité

$$2689 = 40^2 + 33^2,$$

à laquelle sont applicables les remarques exposées précédemment.

SUR LA CISSOIDE DE DIOCLÈS;

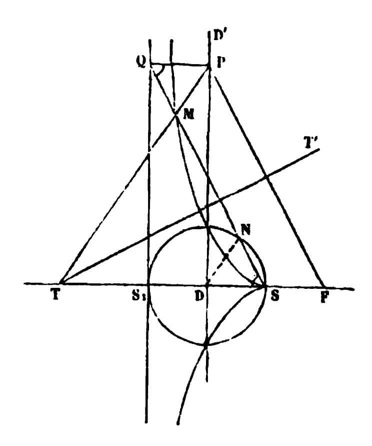
PAR M. L. MIRMAN,
Élève du lycée Saint-Louis.

On sait que le lieu des symétriques du sommet d'une parabole par rapport aux tangentes à cette courbe est une cissoïde de Dioclès. Voici de cette proposition une démonstration géométrique très simple.

Soient DD' la directrice, F le foyer, S le sommet,

TT' une tangente, P le symétrique du foyer par rapport à cette tangente, M un point du lieu.

Je prolonge SM jusqu'à sa rencontre en Q avec la



parallèle à l'axe menée par le point P, on a

$$PQ = SF = SD;$$

donc Q est sur la parallèle à la directrice menée par S_1 symétrique du sommet. Cela étant, je décris un cercle sur SS_1 comme diamètre; la droite SQ le coupe en N. Joignons ND, on a évidemment

$$DN = DS = SF = MP = PQ;$$

de plus les angles MQP et NSD, alternes-internes, sont égaux. Donc les triangles DNS, MPQ le sont aussi; par suite

$$MQ = NS$$

ou, en ajoutant la même longueur MN,

$$SM = NQ.$$

Le point M décrit donc la cissoïde relative au cercle considéré.

En changeant quelques mots au raisonnement précédent, on démontrerait que, réciproquement :

Toute cissoïde de Dioclès peut être engendrée par le symétrique du sommet d'une parabole par rapport aux tangentes, la parabole ayant pour directrice le diamètre du cercle parallèle à l'asymptote de la cissoïde, et pour sommet le point double.

CORRESPONDANCE.

I. — *Extrait d'une Lettre de M. d'Ocagne.*

Voulez-vous me permettre d'ajouter quelques mots aux remarques très intéressantes qui ont été faites par mon ami M. Cesaro au sujet des coordonnées axiales (*Nouvelles Annales,* même tome, p. 256)?

Mes recherches sur les *Transformations axiales,* auxquelles M. Cesaro fait allusion dans la Note qui termine son article, sont résumées dans la Note III de ma brochure *Coordonnées parallèles et axiales,* qui vient de paraître à la Librairie Gauthier-Villars, et dont la majeure partie, grâce à votre obligeance, a vu le jour dans les *Nouvelles Annales* (¹).

Dans cette Note (p. 87), je fais remarquer que l'identité de l'*inversion axiale* avec la *transformation par semi-droites réciproques* résulte du théorème que j'ai démontré pour cette dernière transformation dans les *Nouvelles Annales* (3e série, t. II, p. 249).

A la liste des géomètres qui se sont occupés des

(¹) Les parties inédites de la brochure sont le *Procédé nouveau de calcul graphique déduit de la considération des coordonnées parallèles* (p. 73 à 81), et diverses Notes (p. 82 à 91), dont la Note *Sur les transformations axiales.*

coordonnées axiales, il convient d'ajouter le nom de M. Casey, professeur à l'Université catholique de Dublin, dont les belles recherches font l'objet d'un Mémoire étendu publié dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* (vol. CLXVII, p. 367).

La courbe que j'ai étudiée au n° 50 de mon Mémoire (*Développante d'hypocycloïde*, d'après MM. Brocard et Cesaro) a déjà été rencontrée par un assez grand nombre de géomètres à l'occasion de recherches diverses; c'est M. Brocard qui nous l'a fait savoir dans une Note intéressante (*Nouvelles Annales,* même tome, p. 144). Aux mathématiciens cités en cet endroit, il faut joindre M. Collignon qui a eu aussi l'occasion de considérer cette courbe (*Association française, Congrès d'Alger,* p. 219).

Nous terminerons par la remarque suivante : *l'équation axiale* de la tractrice (*Nouvelles Annales,* 3e série, t. III, p. 553) conduit immédiatement à une curieuse propriété de cette courbe qui a été signalée par M. Collignon (¹) :

Si, par le point où chaque tangente t à une tractrice coupe l'asymptote δ de cette courbe, on élève une perpendiculaire p à δ et que l'on inscrive à côté de p la valeur de l'angle que p fait avec t, on obtient une projection de Mercator dans laquelle les droites p représentent les parallèles, l'angle inscrit à côté de chacune de ces droites faisant connaître la latitude correspondante.

La simple comparaison de l'équation axiale de la

(¹) Mémoire intitulé : *Mesure des lignes sur la sphère terrestre,* dans le *Bulletin de l'Association française* (Congrès de Blois).

tractrice avec l'équation fondamentale bien connue de la projection de Mercator conduit à ce résultat.

Les remarques faites par M. Cesaro au sujet des racines imaginaires des équations dans le numéro de juillet (p. 329) se ramènent immédiatement au curieux théorème que voici :

Si les affixes des racines d'une équation algébrique figurent des centres d'attraction, de même masse, attirant un point mobile en raison inverse de la distance, les positions d'équilibre de ce point mobile coïncident avec les affixes des racines de l'équation dérivée.

Ce théorème, dû à M. Félix Lucas, a été communiqué par son auteur à l'Académie des Sciences dans la séance du 28 juillet 1879. M. Félix Lucas en a déduit diverses conséquences importantes pour la théorie des racines imaginaires.

II. — *Lettre de M. Réalis.*

Les propositions que vous m'avez fait l'honneur d'insérer aux *Nouvelles Annales* (p. 370, 1883), et dont on n'a pas encore envoyé de démonstration, me font penser qu'il ne serait peut-être pas inopportun de les faire suivre de quelques autres énoncés analogues, et fondés de même sur des considérations arithmologiques.

Je me borne en ce moment à la *Question* ci-jointe, faisant partie d'une série de questions du même genre, que j'ai rédigées, et que je m'empresserai de vous transmettre, si vous croyez que cela puisse intéresser vos lecteurs.

Question.

α, β, γ étant des nombres entiers, et β étant premier avec 5, *aucune des équations*

$$x^4 - \alpha x^3 + (4\alpha^2 \pm \beta^2)x^2 - 2\alpha\beta^2 x + \beta(5\gamma^3 \pm 4\beta^3) = 0,$$
$$x^4 - \alpha x^3 + (4\alpha^2 \pm 4\beta^2)x^2 - 3\alpha\beta^2 x + \beta(5\gamma^3 \pm 4\beta^3) = 0$$

(où les signes se correspondent) ne peut avoir une racine entière.

De même pour les équations

$$x^4 - \alpha x^3 + (4\alpha^2 + 2\beta^2)x^2 - \alpha\beta^2 x + A = 0,$$
$$x^4 - \alpha x^3 + (4\alpha^2 + 2\beta^2)x^2 - 2\alpha\beta^2 x - A = 0,$$
$$x^4 - \alpha x^3 + (4\alpha^2 + 3\beta^2)x^2 - 3\alpha\beta^2 x + A = 0,$$
$$x^4 - \alpha x^3 + (4\alpha^2 + 3\beta^2)x^2 - 4\alpha\beta^2 x + A = 0,$$

$$x^4 - \alpha x^3 + 4\alpha^2 x^2 - \alpha\beta^2 x + B = 0,$$
$$x^4 - \alpha x^3 + 4\alpha^2 x^2 - 4\alpha\beta^2 x + B = 0,$$
$$x^4 - \alpha x^3 + (4\alpha^2 - \beta^2)x^2 - \alpha\beta^2 x - B = 0,$$
$$x^4 - \alpha x^3 + (4\alpha^2 - 4\beta^2)x^2 - 4\alpha\beta^2 x + B = 0,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$A = \beta(5\gamma^3 + 4\beta^3), \quad B = \beta(5\gamma^3 - 4\beta^3).$$

Solution de la question proposée.

Ni l'une, ni l'autre des formes $u^2 + 2v^2$, $u^2 + 3v^2$, dans lesquelles u et v sont premiers entre eux, ne peut représenter un nombre divisible par 5.

(Euler, Lagrange.)

La proposition subsiste évidemment si l'un des nom-

bres u, v est premier avec 5, lors même qu'ils auraient des facteurs communs.

Cela étant, les relations

$$(x^2+2\alpha x+2\beta^2)^2+2(\beta x)^2$$
$$=5(\alpha x^3+\beta^2x^2+2\alpha\beta^2x-\beta\gamma^3),$$

$$(x^2+2\alpha x+2\beta^2)^2+2\beta^4$$
$$=5(\alpha x^3+\beta^2x^2+2\alpha\beta^2x-\beta\gamma^3-2\beta^4),$$

$$(x^2+2\alpha x-2\beta^2)^2+2(2\beta x)^2$$
$$=5(\alpha x^3-\alpha\beta^2x-\beta\gamma^3),$$

$$(x^2+2\alpha x-2\beta^2)^2+2\beta^4$$
$$=5(\alpha x^3-\alpha\beta^2x-\beta\gamma^3+2\beta^4);$$

$$(x^2+2\alpha x+\beta^2)^2+3\beta^4$$
$$=5(\alpha x^3+\alpha\beta^2x-\beta\gamma^3),$$

$$(x^2+2\alpha x+2\beta^2)^2+2(2\beta x)^2$$
$$=5(\alpha x^3+2\beta^2x^2+2\alpha\beta^2x-\beta\gamma^3),$$

$$(x^2+2\alpha x-2\beta^2)^2+2(\beta x)^2$$
$$=5(\alpha x^3-\beta^2x^2-\alpha\beta^2x-\beta\gamma^3),$$

$$(x^2+2\alpha x-\beta^2)^2+3\beta^4$$
$$=5(\alpha x^3-\beta^2x^2-\beta\gamma^3);$$

$$(x^2+2\alpha x+\beta^2)^2+2(2\beta x)^2$$
$$=5(\alpha x^3+2\beta^2x^2+\alpha\beta^2x-\beta\gamma^3+\beta^4),$$

$$(x^2+2\alpha x-\beta^2)^2+2(\beta x)^2$$
$$=5(\alpha x^3-\beta\gamma^3+\beta^4),$$

$$(x^2+2\alpha x+\beta^2)^2+2(\beta x)^2$$
$$=5(\alpha x^3+\beta^2x^2+\alpha\beta^2x-\beta\gamma^3+\beta^4),$$

$$(x^2+2\alpha x-\beta^2)^2+2(2\beta x)^2$$
$$=5(\alpha x^3+2\beta^2x^2-\beta\gamma^3+\beta^4),$$

c'est-à-dire les équations proposées sont impossibles en nombres entiers, si β (et par conséquent x) est premier avec 5.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1431

(voir 3e série, t. II, p. 333);

PAR M. FAUQUEMBERGUE,
Professeur au lycée de Nice.

Démontrer que si les deux racines de l'équation

$$z^2 - 3\alpha z - (\alpha^3 - \beta^2) = 0$$

sont entières, l'équation indéterminée

$$\text{(A)} \qquad x^3 + k = y^2,$$

dans laquelle on a pris

$$k = [(\alpha + 1)^3 - (\beta + 1)^2]\, z,$$

admet toujours une solution entière. (RÉALIS.)

Posons

$$x = \alpha - z, \quad y = \beta - z,$$

α, β, z désignant trois entiers indéterminés.

L'équation (A) pourra se mettre sous la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} k = z^2 - 3\alpha z - (\alpha^3 - \beta^2) \\ \qquad + (z^2 - 3\alpha z + 3\alpha^2 + 3\alpha - 2\beta)\, z. \end{cases}$$

On voit qu'elle sera vérifiée, si l'on a, à la fois,

$$z^2 - 3\alpha z - (\alpha^3 - \beta^2) = 0$$

et

$$k = (z^2 - 3\alpha z + 3\alpha^2 + 3\alpha - 2\beta)\, z;$$

ou, en tenant compte de la première de ces deux équations,

$$k = (\alpha^3 - \beta^2 + 3\alpha^2 + 3\alpha - 2\beta)\, z.$$

ce qui revient à

$$k = [(\alpha+1)^3 - (\beta+1)^2]s.$$

Le théorème énoncé est ainsi démontré.

Question 1504

(voir 3e série, t. III, p. 447);

PAR M. N. GOFFART.

Le triangle ABC *rectangle en* A *est inscrit dans une hyperbole équilatère, les tangentes à cette courbe aux points* B *et* C *se coupent en* T; *la normale au point* B *coupe le côté* AC *au point* B′, *la normale au point* C *coupe le côté* AB *au point* C′. *Démontrer que l'angle* B′TC′ *est égal à l'angle des tangentes.* (D'OCAGNE.)

Soient $xy = 1$ l'équation de l'hyperbole, et (a, a'), (b, b'), (c, c') les coordonnées des sommets A, B, C. L'angle A sera droit si l'on a

$$(1) \qquad a^2bc + 1 = 0.$$

Les équations des tangentes BT et CT sont respectivement

$$bY + b'X = 2, \quad cY + c'X = 2.$$

Ces tangentes se coupent au point T, dont les coordonnées sont

$$X = \frac{2bc}{b+c}, \quad Y = \frac{2}{b+c}.$$

On a

$$\text{tang}\,\text{BTC} = \frac{b^2 - c^2}{1 + b^2c^2}.$$

Or l'équation de la normale en B est

$$b'Y - bX = b'^2 - b^2.$$

et celle du côté AC

$$acY + X = a + c;$$

l'équation d'une droite passant par leur point d'intersection est

$$\lambda(b'Y - bX + b^2 - b'^2) + ac\,Y + X - (a + c) = 0.$$

Cette droite passera au point T si

$$\lambda = \frac{b^2(a - c)}{b^4 + 1}.$$

Le coefficient d'inclinaison de B'T est donc

$$\frac{b^3(a - b - c) - 1}{(ab - bc + ac) + ab^4c},$$

et l'on a celui de C'T par symétrie

$$\frac{c^3(a - b - c) - 1}{(ab - bc + ac) + abc^4};$$

d'où résulte

$$\begin{aligned}\text{tang}\,B'TC' &= \frac{(b^2 - c^2)(a - b)(a - c)(b^2 + bc + c^2)}{(1 + b^2c^2)(a - b)(a - c)(b^2 + bc + c^2)}\\ &= \frac{b^2 - c^2}{1 + b^2c^2} = \text{tang}\,BTC.\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Nota. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1506

(voir 3e série, t. III, p. 447).

PAR M. JUHEL-RÉNOY.

Soient CA, CB *deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse ; et* P, Q *deux points de* CA, CB *prolongés, tels que* AP.BQ = 2CA.CB. *Démontrer que* BP *et* AQ *se coupent sur l'ellipse.* (GENÈSE, M.-A.)

Prenons pour axes de coordonnées les deux droites

CA, CB; et soient

$$CA = a,\quad CB = b,\quad AP = l,\quad Bq = l'.$$

L'équation de l'ellipse est

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

et les équations des droites BP, AQ sont

$$bx + (a + l)y = b(a + l)$$
$$(b + l')x + ay = a(b + l');$$

d'où

$$bx + ay - ab = l(b - y),$$
$$bx + ay - ab = l'(a - x);$$

multiplions ces deux dernières équations, membre à membre, et introduisons la condition $ll' = 2ab$; nous aurons l'équation de l'ellipse donnée

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

La même question a été résolue par M. l'abbé Bretaudeau, professeur au collège de Baupréau (Maine-et-Loire); et par MM. Lez: Launoy, professeur au lycée de Puy; Goffart; Moret-Blanc; Ernest Barisien; Dupin, lycée de Bar-le-Duc; Farisano Giovanni, élève ingénieur à l'Université de Naples; F. Pisani.

Question 1507

(voir 3e série, t. III, p. 448);

PAR M. MORET-BLANC.

PQ *est un diamètre d'une hyperbole équilatère; un cercle décrit du point* P *comme centre avec* PQ *pour rayon rencontre l'hyperbole en trois autres points* L, M, N : *démontrer que le triangle* LMN *est équilatéral.*

(Extrait du Journal anglais *The educational Times.*)

Soient

$$(1)\qquad xy = k^2$$

l'équation de l'hyperbole équilatère; x_0, y_0 les coordonnées du point P, celles du point Q étant $-x_0$, $-y_0$;

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = 4(x_0^2+y_0^2)$$

ou

$$(2)\qquad x^2+y^2-2x_0x-2y_0y-3(x_0^2+y_0^2)=0$$

sera l'équation du cercle décrit du point P avec le rayon PQ.

Éliminant y entre cette équation et celle de l'hyperbole, on a, pour déterminer les abscisses des points d'intersection des deux courbes, l'équation

$$x^4-2x_0x^3-3(x_0^2+y_0^2)x^2-2k^2y_0x+k^4=0.$$

Cette équation devant être vérifiée par l'abscisse $-x_0$ du point Q, son premier membre est divisible par $x+x_0$; effectuant la division, il vient

$$x^3-3x_0x^2-3y_0^2x+y_0^2x_0=0,$$

équation qui donne les abscisses des points L, M, N. On aura l'équation qui donne leurs ordonnées en permutant les x et les y, d'où

$$y^3-3y_0y^2-3x_0^2y+x_0^2y_0=0.$$

La moyenne des abscisses, ou l'abscisse du centre de gravité du triangle LMN, est x_0, son ordonnée est y_0; le point P est, à la fois, le centre de gravité du triangle LMN et le centre du cercle circonscrit au triangle; donc les médianes se confondent avec les hauteurs, et le triangle est équilatéral.

La même question a été résolue par MM. Barisien; Goffart; Juhel Renoy; Pisani; Launoy, professeur au lycée de Puy; Bretaudeau; Lez; Caronnet (Th.), élève de Mathématiques spéciales au collège Chaptal; et par un Anonyme.

Question 1512

(voir 3e série, t. III, p. 496);

PAR M. J. RICHARD,
Élève à l'École Normale supérieure.

Trouver l'enveloppe d'une parabole dont le foyer F *et un point,* P, *de la directrice sont fixes.* (D'OCAGNE.)

On sait que la directrice est le lieu des symétriques du foyer par rapport aux tangentes. Donc, si l'on joint le point fixe P de la directrice au foyer, et si, au milieu de la droite PF, on élève une perpendiculaire, cette perpendiculaire sera constamment tangente à la parabole variable: c'est donc l'enveloppe cherchée.

La Géométrie analytique conduit au même résultat.

Prenons le point F pour origine, et FP pour axe des x. Soit FP $= a$.

L'équation générale des paraboles, dont F est le foyer et P un point de la directrice, peut s'écrire

$$(1)\qquad (x-a)\cos\varphi+y\sin\varphi=\pm\sqrt{x^2+y^2}.$$

En égalant les dérivées des deux membres, par rapport à φ, on a

$$(2)\qquad -(x-a)\sin\varphi+y\cos\varphi=0.$$

Pour avoir l'équation de l'enveloppe, il faut éliminer φ entre les équations (1) et (2), ce qui se fait en les élevant au carré et ajoutant; on obtient alors

$$(x-a)^2+y^2=x^2+y^2,\quad \text{d'où}\quad x=\frac{a}{2}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Goffart; Moret-Blanc; Lez; Geneix-Martin; Louis M.; Ernest Barisien; Juhel Renoy; Bretaudeau; Dupin, lycée de Bar-le-Duc; Mirman, élève en spéciales, au lycée Saint-Louis; Auguste Dallot; Caronnet (Th.), élève en Mathématiques spéciales au collège Chaptal; et par un Anonyme.

Question 1314

(voir 3ᵉ série, t. III, p. 496);

PAR M. LEZ.

Par les sommets d'un triangle ABC, *on mène aux côtés opposés des droites* AD, BE, CF *se coupant en un même point* O; *on a*

$$\frac{AO}{AD}+\frac{BO}{BE}+\frac{CO}{CF}=2.$$

De même, si, par les sommets d'un tétraèdre ABCD *on mène aux faces opposées des droites* AE, BF, CG, DH *se coupant en un même point* O, *on a*

$$\frac{AO}{AE}+\frac{BO}{BF}+\frac{CO}{CG}+\frac{DO}{DH}=3.$$

(GENTY.)

Le triangle ABC se décompose en trois triangles ayant un sommet commun au point O, et pour bases les côtés du triangle.

Or les triangles ABC, BOC ayant même base BC sont entre eux comme leurs hauteurs, ou dans le même rapport que les segments AD, OD, c'est-à-dire que

$$\frac{ABC}{BOC}=\frac{AD}{OD}.$$

On peut donc écrire

$$\frac{ABC-BOC}{ABC}=\frac{AD-OD}{AD}=\frac{AO}{AD}.$$

De même,

$$\frac{ABC-AOC}{ABC}=\frac{BO}{BE},$$

$$\frac{ABC-AOB}{ABC}=\frac{CO}{CF}.$$

Additionnant, on a

$$\frac{3ABC-ABC}{ABC}=2=\frac{AO}{AD}+\frac{BO}{BE}+\frac{CO}{CF}.$$

Par analogie, le tétraèdre ABCD se décompose en quatre tétraèdres ayant pour sommet commun le point O, et pour bases chacune de ses faces.

Or les tétraèdres ABCD, OBCD ayant même base BCD sont entre eux comme leurs hauteurs, ou dans le même rapport que les segments AE, OE, c'est-à-dire que

$$\frac{ABCD}{OBCD} = \frac{AE}{OE}.$$

On peut donc écrire

$$\frac{ABCD - OBCD}{ABCD} = \frac{AE - OE}{AE} = \frac{AO}{AE}.$$

De même

$$\frac{ABCD - OACD}{ABCD} = \frac{BO}{BF},$$

$$\frac{ABCD - OABD}{ABCD} = \frac{CO}{CG},$$

$$\frac{ABCD - OABC}{ABCD} = \frac{DO}{DH}.$$

Additionnant, on a

$$\frac{4ABCD - (OBCD + OACD + OADB + OABC)}{ABCD}$$

$$= 3 = \frac{AO}{AE} + \frac{BO}{BF} + \frac{CO}{CG} + \frac{DO}{DH}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Goffart; Moret-Blanc; Geneix-Martin; Mirman; Richard; Pisani; Collier, élève en seconde au Prytanée militaire; et par un Anonyme.

Question 1520

(voir 3e série, t. IV, p. 56);

PAR M. E. BARISIEN.

Si du point O *on voit le côté* BC *du triangle* ABC *sous un angle égal à* A *augmenté de* 90°, *on a entre les côtés* a, b, c *du triangle et les distances* α, β, γ *du*

point O *aux sommets* A, B, C *la relation*

$$a^2 \alpha^2 = b^2 \beta^2 + c^2 \gamma^2 \text{ (1)}.$$

(D'OCAGNE.)

Les triangles ABC et OBC (²) donnent les égalités

$$(1) \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$(2) \qquad a^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \sin A,$$

qui permettent de déterminer cos A et sin A rationnellement en fonction de a, b, c et de α, β, γ.

En désignant par x l'angle OBC, on pourra aussi déterminer rationnellement $\sin x$ et $\cos x$. En effet, on a

$$\gamma^2 = a^2 + \beta^2 - 2a\beta \cos x \quad \text{et} \quad \frac{\sin x}{\gamma} = \frac{\cos A}{a},$$

donc

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos x &= \frac{a^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2a\beta} \\ &\text{et} \\ \sin x &= \frac{\gamma \cos A}{a} = \frac{\gamma(b^2 + c^2 - a^2)}{2abc}. \end{aligned} \right.$$

Or, dans le triangle AOB,

$$\alpha^2 = \beta^2 + c^2 - 2\beta c \cos(B - x)$$

ou

$$\alpha^2 = \beta^2 + c^2 - 2\beta c(\cos B \cos x + \sin B \sin x).$$

Mais

$$(4) \qquad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

et

$$(5) \qquad \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{b(a^2 - \beta^2 - \gamma^2)}{2a\beta\gamma},$$

en tenant compte de l'égalité (2).

(¹) En supposant, toutefois, que le point O et le sommet A soient situés d'un même côté de la droite BC sur le plan du triangle, car autrement la proposition énoncée ne serait pas exacte. (G.)

(²) Le lecteur est prié de faire la figure.

En remplaçant dans l'expression de α^2, $\sin B$, $\cos B$, $\sin x$, $\cos x$ par les valeurs (3), (4) et (5), il vient

$$\alpha^2 = 6^2 + c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + 6^2 - \gamma^2)}{2a^2} - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 - 6^2 - \gamma^2)}{2a^2}.$$

Cette expression développée et réduite devient

$$(6) \qquad a^2\alpha^2 = b^2 6^2 + c^2\gamma^2.$$

Remarque. — En éliminant A entre les équations (1) et (2), on a la relation

$$(7) \qquad \frac{(6^2 + \gamma^2 - a^2)^2}{4\, 6^2\gamma^2} + \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = 1.$$

On sait, en effet, qu'il existe une relation entre les distances mutuelles de quatre points O, A, B, C. Dans le cas particulier qui nous occupe, cette relation se dédouble en les deux égalités (6) et (7).

La même question a été résolue par MM. Goffart; Laisant; et Gaetano de Marco, élève de l'Université de Naples.

Note. — Sur le plan du triangle ABC, le lieu géométrique d'un point O, défini par la relation

$$a^2\alpha^2 = b^2 6^2 + c^2\gamma^2,$$

est une circonférence que l'équation

$$x^2 + y^2 - ax + a \operatorname{tang} A . y = 0$$

représente, en prenant pour origine des coordonnées rectangulaires le sommet B du triangle, et dirigeant l'axe des abscisses suivant la droite BC.

Les points B et C appartiennent évidemment à cette circonférence; le côté BC partage le cercle en deux segments : l'un d'eux situé, par rapport à BC, du même côté que le sommet A, est capable d'un angle de $90° + A$; l'autre segment est capable d'un angle de $90° - A$. (G.)

Question 1521
(voir 3ᵉ série, t. IV, p. 56);

PAR M. LEBOULLEUX,
Professeur de Mathématiques à Genève.

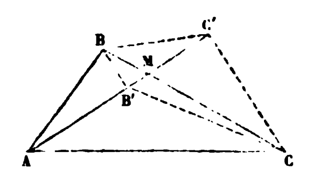
Le point M *étant pris d'une manière quelconque sur le côté* BC *du triangle* ABC, *on projette orthogonalement en* B′, C′ (*fig.* 1) *les sommets* B, C, *sur* AM : *démontrer qu'on a la relation*

$$BC.AM = MB.AC' + MC.AB'.$$

(D'OCAGNE.)

Je remarque d'abord que la similitude des triangles

Fig. 1.



rectangles BB′M, CC′M (*fig.* 1), donne

$$MC.MB' = MB.MC';$$

on a d'ailleurs

$$\begin{aligned} BC.AM &= (MB + MC)(AB' - MB') \\ &= MB(AB' + MB') + MC.AB' - MC.MB'; \end{aligned}$$

ou, parce que

$$MC.MB' = MB.MC',$$

on a

$$\begin{aligned} BC.AM &= MB(AB' + MB' + MC') + MC.AB' \\ &= MB.AC' + MC.AB', \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer ([1]).

([1]) En désignant par ABC, ABC′, ACB′ les surfaces des triangles ABC, ABC′, ACB′, l'égalité proposée BC.AM = MB.AC′ + MC.AB′ revient à celle-ci : ABC = ABC′ + ACB′, parce que les produits

Note. — La même question a été résolue par MM. Pisani; Goffart; Laisant; Geneix-Martin; Lez; Moret-Blanc; Barisien; Gaetano de Marco, élève de l'Université de Naples; Puech, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Rennes.

BC.AM, MB.AC', MC.AB' sont proportionnels aux surfaces des triangles ABC, ABC', ACB'.

Or, on a évidemment (*fig.* 1)

$$ABC = ABC' + ACB' + MCB' - MBC',$$

mais l'égalité

$$MC.MB' = MB.MC'$$

donne

$$MCB' = MBC',$$

donc

$$ABC = ABC' + ACB',$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour généraliser la formule proposée

$$BC.AM = MB.AC' + MC.AB',$$

il faut, comme dans toutes les propositions de ce genre, avoir égard aux signes des segments AB', AC'; leur donner le même signe, ou des signes différents, suivant qu'ils sont dirigés dans le même sens, ou en sens contraire, à partir du point A, sur la droite AM, indéfiniment prolongée.

Si l'on considère comme positifs les segments dirigés dans le sens

Fig. 2.

AM, il faudra prendre négativement un segment dirigé dans le sens contraire.

Lorsque, par exemple, l'angle MAB est obtus (*fig.* 2) le segment AB' est négatif, et, en valeurs absolues, on a

$$BC.AM = MB.AC' - MC.AB',$$

comme il est facile de s'en assurer. (G.)

QUESTIONS.

1532. Pour quelles valeurs de x l'expression

$$1.2.3.4\ldots x+1$$

est-elle un carré parfait? (BROCARD.)

1533. n étant un nombre entier positif,

$$3^{2n+3}+40.n-27$$

est divisible par 64. (WOLSTENHOLME.)

1534. Le lieu des foyers des coniques doublement tangentes à deux cercles donnés se compose de cinq cercles. (ENTRETIN.)

1535. Le produit des distances des foyers d'une ellipse à une normale à cette courbe est égal au carré du demi-diamètre perpendiculaire à cette normale moins le carré du demi petit arc. (D'OCAGNE.)

1536. Dans la parabole, les segments déterminés sur deux tangentes issues d'un même point de l'axe, par deux tangentes quelconques, sont égaux. (D'OCAGNE.)

1537. On considère les pieds des quatre normales menées d'un même point à une ellipse : démontrer que le rapport de la moyenne géométrique des abscisses de ces quatre pieds, à leur moyenne arithmétique, est constant et égal au grand axe de l'ellipse.

Le même rapport relatif aux ordonnées est égal au petit axe. (BARISIEN.)

1538. L'aire du triangle formé par les centres des trois cercles ex-inscrits à un triangle est égale au produit du périmètre de ce triangle par le rayon du cercle circonscrit. (BARISIEN.)

1539. Le lieu des foyers des sections faites dans un ellipsoïde de révolution aplati, par un faisceau de plans passant par une même droite parallèle à l'axe de révolution, est une podaire d'ellipse. (Fouret.)

1540. Le lieu des foyers des sections faites dans un cylindre parabolique par un faisceau de plans passant par une même droite perpendiculaire au plan diamétral principal du cylindre, est une podaire de parabole. (Fouret.)

1541. Trouver le lieu des points, tels que les quatre normales menées de ces points à une ellipse donnée forment un faisceau harmonique. (L. Mirman.)

1542. Étant donnés deux plans fixes, on considère deux sphères de même rayon, tangentes entre elles et touchant chacune un des deux plans.

Le point commun à l'une des deux sphères et au plan correspondant étant donné, on demande le lieu du point commun aux deux sphères lorsqu'on fait varier leur rayon. (A. Geneix-Martin.)

1543. On donne l'une des deux asymptotes d'une hyperbole équilatère, une tangente et un point de la courbe, déterminer le centre et les autres éléments de la courbe. (Solution géométrique.)

1544. On donne une parabole et un point dans son plan; par ce point on mène une sécante quelconque, et sur la corde ainsi déterminée, prise comme diamètre, on décrit un cercle; trouver l'enveloppe de la polaire du sommet de la parabole par rapport à ce cercle. (Wolstenholme.)



SUR UNE NOUVELLE PROPRIÉTÉ D'UN SYSTÈME TRIPLE DE SURFACES QUARTIQUES HOMOFOCALES, COMPRENANT COMME CAS PARTICULIER LA SURFACE DES ONDES;

PAR M. A. LEGOUX,
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Si l'on considère les surfaces représentées par l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{r^2+\rho-a^2}+\frac{y^2}{r^2+\rho-b^2}+\frac{z^2}{r^2+\rho-c^2}=1,$$

où ρ représente un paramètre variable et où

$$r^2 = x^2+y^2+z^2,$$

on a un système triple, car par un point donné on peut faire passer trois surfaces de ce système. Ce système triple jouit des propriétés suivantes :

1° Il comprend, comme cas particulier, la surface des ondes ordinaire, si l'on donne au paramètre ρ une valeur plus petite que les constantes a^2, b^2, c^2; c'est en effet la surface des ondes qui dérive de l'ellipsoïde

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2-\rho}+\frac{y^2}{b^2-\rho}+\frac{z^2}{c^2-\rho}=1.$$

2° Toutes les surfaces du système ont pour enveloppe une développable focale du huitième ordre et de quatrième classe; on trouve en effet la même enveloppe pour les surfaces (1) que pour les quadriques homofocales

$$\frac{x^2}{\lambda-a^2}+\frac{y^2}{\lambda-b^2}+\frac{z^2}{\lambda-c^2}=1;$$

donc les surfaces (1) sont homofocales aux surfaces

quadriques précédentes. On arriverait à la même conclusion si, à la place de r^2, dans l'équation (1), on mettait une fonction quelconque de x, y, z.

3° Les sections principales des surfaces du système se composent d'une famille de cercles ayant pour centre l'origine, et d'une famille de coniques homofocales. Sur le plan XOY les équations de la section sont

(cercles),
$$r^2 + \rho - c^2 = 0$$

$$\frac{x^2}{b^2 - \rho} + \frac{y^2}{a^2 - \rho} = 1$$

(coniques homofocales).

On sait que la considération des systèmes triples homofocaux de surfaces du second ordre a permis d'étudier bien aisément les courbes tracées sur l'une de ces surfaces, en prenant pour lignes coordonnées, sur cette surface, ses intersections avec les deux autres. Le but de ce travail est de montrer que le système triple de surfaces du quatrième ordre se prête avec une grande facilité à l'étude des courbes tracées sur une surface d'onde ordinaire. Nous trouverons l'expression de l'arc infiniment petit en fonction de deux paramètres et nous remarquerons la simplicité de cette expression et son analogie avec la même formule relative aux courbes tracées sur l'ellipsoïde. Nous donnerons les équations différentielles des lignes de courbure, des lignes asymptotiques, sur une de ces surfaces d'onde.

Soient ρ, ρ_1, ρ_2 les trois valeurs du paramètre ρ qui correspondent à un point de l'espace (x, y, z), ou les trois racines de l'équation (1) lorsqu'on y suppose x, y, z connus et ρ inconnue. A l'une de ces racines correspondra une surface d'onde ordinaire dérivant de l'ellipsoïde; aux deux autres correspondront des surfaces quartiques homofocales à la précédente et dérivant de

deux hyperboloïdes représentés par l'équation (2). Nous désignerons ces trois surfaces par la même dénomination de *surfaces d'ondes*, sans distinguer celle qui dérive de l'ellipsoïde des deux autres qui lui sont conjuguées ; nous les appellerons les *surfaces* ρ, ρ_1, ρ_2.

Enfin nous terminerons cette étude en montrant que toutes les propriétés descriptives communes aux surfaces (1) s'appliquent à un système triple formé par des surfaces de Kummer à seize points singuliers, dont les surfaces d'ondes ne sont que des cas particuliers.

FORMULES RELATIVES AUX COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE ρ_2.

L'équation (1) peut être écrite sous la forme suivante

$$\begin{aligned}x^2(r^2+\rho-b^2)(r^2+\rho-c^2)+y^2(r^2+\rho-c^2)(r^2+\rho-a^2)\\ +z^2(r^2+\rho-a^2)(r^2+\rho-b^2)\\ =(r^2+\rho-a^2)(r^2+\rho-b^2)(r^2+\rho-c^2)\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}(r^2+\rho)^3-(r^2+\rho)^2(x^2+y^2+z^2+a^2+b^2+c^2)\\ +(r^2+\rho)[(c^2+b^2)x^2+(a^2+c^2)y^2+(b^2+a^2)z^2\\ +b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2]\\ -b^2c^2x^2-c^2a^2y^2-a^2b^2z^2-a^2b^2c^2=0.\end{aligned}$$

Posons

$$r^2+\rho-a^2=\mathrm{T};$$

l'équation devient, en ordonnant relativement à T,

$$\mathrm{T}^3-\mathrm{AT}^2+\mathrm{BT}-(a^2-b^2)(a^2-c^2)x^2=0.$$

Mais nous avons appelé ρ, ρ_1, ρ_2 les trois racines de l'équation en ρ : on aura donc

$$\begin{aligned}(r^2+\rho-a^2)(r^2+\rho_1-a^2)(r^2+\rho_2-a^2)\\ =(a^2-b^2)(a^2-c^2)x^2\end{aligned}$$

et

$$r^2+\rho-a^2+r^2+\rho_1-a^2+r^2+\rho_2-a^2=r^2+c^2+b^2-2a^2.$$

On tire de la seconde

$$r^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - \frac{\rho+\rho_1+\rho_2}{2};$$

et, en substituant dans la première, il vient

$$x^2 = \frac{\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{\rho-\rho_1-\rho_2}{2}-a^2\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{\rho_1-\rho-\rho_2}{2}-a^2\right)\\ \times\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{\rho_2-\rho-\rho_1}{2}-a^2\right)\end{array}\right\}}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)};$$

de simples permutations de lettres donneront

$$y^2 = \frac{\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{\rho-\rho_1-\rho_2}{2}-b^2\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{\rho_1-\rho-\rho_2}{2}-b^2\right)\\ \times\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{\rho_2-\rho-\rho_1}{2}-b^2\right)\end{array}\right\}}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$

$$z^2 = \frac{\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{\rho-\rho_1-\rho_2}{2}-c^2\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{\rho_1-\rho-\rho_2}{2}-c^2\right)\\ \times\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{\rho_2-\rho-\rho_1}{2}-c^2\right)\end{array}\right\}}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

Si l'on pose, pour simplifier l'écriture,

$$\lambda = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{\rho-\rho_1-\rho_2}{2},$$

$$\mu = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{\rho_1-\rho_2-\rho}{2},$$

$$\nu = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{\rho_2-\rho-\rho_1}{2},$$

les formules précédentes deviennent

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} x^2 = \frac{(\lambda-a^2)(\mu-a^2)(\nu-a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\\ y^2 = \frac{(\lambda-b^2)(\mu-b^2)(\nu-b^2)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},\\ z^2 = \frac{(\lambda-c^2)(\mu-c^2)(\nu-c^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.\end{array}\right.$$

On remarque que ces formules ont la même forme que celles obtenues en définissant la position d'un point de l'espace par l'intersection des trois surfaces quadriques homofocales suivantes :

$$\frac{x^2}{\lambda - a^2} + \frac{y^2}{\lambda - b^2} + \frac{z^2}{\lambda - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\mu - a^2} + \frac{y^2}{\mu - b^2} + \frac{z^2}{\mu - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu - a^2} + \frac{y^2}{\nu - b^2} + \frac{z^2}{\nu - c^2} = 1.$$

On remarquera aussi que λ, μ, ν sont des fonctions linéaires des coordonnées ρ, ρ_1, ρ_2, ce qui permettra de passer facilement d'une équation entre les premières coordonnées à l'équation entre les secondes.

Si nous posons

$$-\varphi(u) = (\lambda - u)(\mu - u)(\nu - u),$$
$$f(u) = (u - a^2)(u - b^2)(u - c^2),$$

on trouve aisément

$$x^2 = -\frac{\varphi(a^2)}{f'(a^2)}, \quad y^2 = -\frac{\varphi(b^2)}{f'(b^2)}, \quad z^2 = -\frac{\varphi(c^2)}{f'(c^2)};$$

d'où

$$dx = \frac{x}{2}\left(\frac{d\lambda}{\lambda - a^2} + \frac{d\mu}{\mu - a^2} + \frac{d\nu}{\nu - a^2}\right),$$

$$dy = \frac{y}{2}\left(\frac{d\lambda}{\lambda - b^2} + \frac{d\mu}{\mu - b^2} + \frac{d\nu}{\nu - b^2}\right),$$

$$dz = \frac{z}{2}\left(\frac{d\lambda}{\lambda - c^2} + \frac{d\mu}{\mu - c^2} + \frac{d\nu}{\nu - c^2}\right),$$

et

$$4\,ds^2 = \frac{\varphi'(\lambda)}{f(\lambda)}d\lambda^2 + \frac{\varphi'(\mu)}{f(\mu)}d\mu^2 + \frac{\varphi'(\nu)}{f(\nu)}d\nu^2;$$

et, comme

$$d\lambda = \frac{d\rho - d\rho_1 - d\rho_2}{2},$$

$$d\mu = \frac{d\rho_1 - d\rho_2 - d\rho}{2},$$

$$d\nu = \frac{d\rho_2 - d\rho - d\rho_1}{2},$$

on a

$$16\,ds^2 = \frac{\varphi'(\lambda)}{f(\lambda)}(d\rho - d\rho_1 - d\rho_2)^2$$
$$+ \frac{\varphi'(\mu)}{f(\mu)}(d\rho_1 - d\rho_2 - d\rho)^2 + \frac{\varphi'(\nu)}{f(\nu)}(d\rho_2 - d\rho - d\rho_1)^2.$$

Proposons-nous maintenant d'étudier les courbes tracées sur la surface d'onde $\rho_2 = \text{const.}$; on aura, pour l'expression d'un arc de courbe tracé sur cette surface, les lignes coordonnées étant les traces sur la surface ρ_2 des surfaces conjuguées ρ et ρ_1,

$$16\,ds^2 = \left[\frac{\varphi'(\lambda)}{f(\lambda)} + \frac{\varphi'(\mu)}{f(\mu)} + \frac{\varphi'(\nu)}{f(\nu)}\right](d\rho^2 + d\rho_1^2)$$
$$+ 2\left[-\frac{\varphi'(\lambda)}{f(\lambda)} - \frac{\varphi'(\mu)}{f(\mu)} + \frac{\varphi'(\nu)}{f(\nu)}\right] d\rho\, d\rho_1.$$

La forme particulière de l'expression de ds nous conduit à faire les remarques suivantes :

1° Les deux surfaces d'onde ρ et ρ_1 coupent la surface ρ_2 suivant deux systèmes de courbes, du douzième ordre [1], qui se rencontrent sous un angle variable. Le système triple précédent est donc seulement homofocal, il n'est pas orthogonal; par conséquent les lignes d'intersection de ρ_2 avec ρ et ρ_1 ne sont pas les lignes de courbure de la surface ρ_2.

2° Si l'on fait, dans la formule précédente,

$$\rho_1 = \rho_2 = C,$$

on aura l'enveloppe des surfaces ρ_1 et ρ_2 : cherchons la forme du ds^2 sur cette enveloppe; on a

$$\lambda = \frac{\rho - 2\rho_1}{2} - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2},$$
$$\mu = \frac{-\rho}{2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2},$$
$$\nu = \frac{-\rho}{2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2};$$

---

[1] *Voir* la note placée au bas de la page 401.

d'où

$$\varphi'(\mu) = \varphi'(\nu) = 0$$

et

$$16\, ds^2 = \frac{\varphi'(\lambda)}{f(\lambda)}(d\rho - d\rho_1)^2.$$

C'est précisément la forme qu'affecte le ds^2 d'une courbe tracée sur une développable focale ; donc l'enveloppe des surfaces du système est bien une telle développable, ce qu'on a déjà vu directement. Cette développable est du huitième ordre et de quatrième classe.

3° On saura déterminer sur chaque surface ρ_2 les lignes de longueur nulle ; leur équation différentielle est

$$ds^2 = 0$$

ou bien

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\varphi'(\lambda)}{f(\lambda)} + \frac{\varphi'(\mu)}{f(\mu)} + \frac{\varphi'(\nu)}{f(\nu)}\right](d\rho^2 + d\rho_1^2) \\ &\quad + 2\left[-\frac{\varphi'(\lambda)}{f(\lambda)} - \frac{\varphi'(\mu)}{f(\mu)} + \frac{\varphi'(\nu)}{f(\nu)}\right] d\rho\, d\rho_1 = 0. \end{aligned}$$

4° On pourra aussi écrire les équations de l'arête de rebroussement de la développable focale circonscrite aux surfaces du système ; il suffira de faire

$$\rho = \rho_1 = \rho_2,$$

d'où

$$\lambda = \mu = \nu = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{\rho}{2}$$

et

$$x^2 = \frac{(\lambda - a^2)^3}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)},$$

$$y^2 = \frac{(\lambda - b^2)^3}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)},$$

$$z^2 = \frac{(\lambda - c^2)^3}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)};$$

posons

$$M = (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$$

et éliminons λ entre les trois équations précédentes; il vient

$$\lambda = a^2 + \left(\frac{M}{c^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}$$

$$= b^2 + \left(\frac{M}{a^2 - c^2}\right)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = c^2 + \left(\frac{M}{b^2 - a^2}\right)^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}};$$

c'est une ligne du douzième ordre.

5° On peut déterminer l'intersection de la développable focale précédente avec la surface ρ_2. La surface $\rho_2 = \alpha$ aura avec cette développable focale deux séries de points communs : 1° ceux qu'on obtiendra en faisant $\rho = \rho_1$; 2° ceux qu'on obtiendra en donnant à ρ ou à ρ_1 la même valeur α. Les premiers points constituent l'enveloppe des courbes que tracent sur ρ_2 les deux systèmes de surfaces conjuguées ρ et ρ_1.

Faisons $\rho = \rho_1$ dans les formules générales (3), on aura d'abord

$$\lambda = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{\rho_2}{2},$$

$$\mu = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{\rho_2}{2},$$

$$\nu = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{\rho_2}{2} - \rho;$$

les valeurs de x^2, y^2, z^2 prendront la forme

$$x^2 = B(A - \rho), \quad y^2 = B'(A' - \rho), \quad z^2 = B''(A'' - \rho),$$

où A, A', A'', B, B', B'' sont des constantes.

On en tire

$$A - \frac{x^2}{B} = A' - \frac{y^2}{B'} = A'' - \frac{z^2}{B''};$$

c'est une courbe du quatrième ordre, intersection de deux cylindres du second ordre.

Les seconds points sont sur la courbe limite, intersection de la surface d'onde ρ_2 avec la surface infiniment

voisine de ρ_2; on les obtient en faisant ρ ou $\rho_1 = \rho_2 = \alpha$.

Soit, par exemple, $\rho_1 = \rho_2 = \alpha$; des formules générales

$$\lambda = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \alpha + \frac{\rho}{2},$$
$$\mu = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{\rho}{2},$$
$$\nu = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{\rho}{2}$$

on déduit

$$Mx^2 = \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} - \alpha + \frac{\rho}{2}\right)\left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{\rho}{2}\right)^2 (c^2 - b^2),$$
$$My^2 = \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} - \alpha + \frac{\rho}{2}\right)\left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} - \frac{\rho}{2}\right)^2 (a^2 - c^2),$$
$$Mz^2 = \left(\frac{b^2 - c^2 + a^2}{2} - \alpha + \frac{\rho}{2}\right)\left(\frac{b^2 - c^2 + a^2}{2} - \frac{\rho}{2}\right)^2 (b^2 - a^2),$$

en posant

$$M = (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2).$$

Ces trois équations, dans lesquelles on considère ρ comme un paramètre variable, représentent une courbe gauche du douzième ordre [1], de telle façon que l'intersection de la développable focale circonscrite avec la surface ρ_2 se compose : 1° d'une courbe du quatrième ordre; 2° d'une courbe du douzième ordre qui compte double, qui équivaut par suite à une ligne du vingt-quatrième ordre; 3° du cercle de l'infini qui compte double également; ce qui forme en tout une intersection du trente-

---

[1] Soit $Ax + By + Cz = D$ l'équation d'un plan quelconque. Pour trouver le nombre de points de la courbe qui sont situés dans ce plan, il suffit de remplacer x, y, z par leurs valeurs en fonctions de ρ, ce qui donnera une équation qui, rendue rationnelle, sera du douzième degré en ρ; d'où l'on conclut qu'il y a douze points dans le plan. Un calcul pareil montre que deux surfaces du système ρ et ρ_1 se coupent suivant une ligne du douzième ordre.

deuxième ordre. Comme la développable focale est du huitième ordre, son intersection avec la surface ρ_2 est effectivement du trente-deuxième ordre.

Considérons un point O de la surface ρ_2 et les deux courbes d'intersection de ρ_2 avec ρ et ρ_1; soient ρ et ρ_1 les coordonnées du point O, $\rho + d\rho$, $\rho_1 + d\rho_1$ les coordonnées d'un point M infiniment voisin de O. On peut considérer M et O comme les deux sommets opposés d'un parallélogramme dont les côtés OA et OB sont dirigés suivant les lignes ρ et ρ_1 qui passent par le point O. Posons $OA = d\sigma_1$, $OB = d\sigma$, $AOB = \varphi$,

$$E = \frac{1}{16}\left[\frac{\varphi'(\lambda)}{f(\lambda)} + \frac{\varphi'(\mu)}{f(\mu)} + \frac{\varphi'(\nu)}{f(\nu)}\right],$$

$$F = \frac{1}{16}\left[-\frac{\varphi'(\lambda)}{f(\lambda)} - \frac{\varphi'(\mu)}{f(\mu)} + \frac{\varphi'(\nu)}{f(\nu)}\right];$$

on aura

$$d\sigma_1 = \sqrt{E}\,d\rho_1, \quad d\sigma = \sqrt{E}\,d\rho, \quad \cos\varphi = \frac{F}{E},$$

$$ds^2 = d\sigma^2 + d\sigma_1^2 + 2\,d\sigma\,d\sigma_1\cos\varphi.$$

Cherchons les équations des bissectrices des angles formés par les deux courbes ρ et ρ_1 qui se croisent au point O sur la surface ρ_2, on aura

$$d\sigma = d\sigma_1, \quad d\sigma = -\,d\sigma_1$$

ou

$$\rho - \rho_1 = C, \quad \rho + \rho_1 = C'.$$

Si, dans les formules générales (3), on fait $\rho + \rho_1 = C'$, on a $r^2 = \text{const.}$; et, en combinant cette équation avec l'équation (1), on voit que l'on a une conique sphérique.

Si l'on fait $\rho - \rho_1 = C$, λ et μ sont constants; la courbe est par suite une courbe du quatrième ordre, intersection de deux quadriques homofocales.

D'où il résulte qu'en chaque point de la surface ρ_2 il passe : 1° une conique sphérique; 2° une courbe du qua-

trième ordre, intersection de deux quadriques homofocales. Ces courbes sont bissectrices des angles des deux courbes ρ et ρ_1; elles constituent donc un système orthogonal sur la surface ρ_2.

Or les formules relatives aux courbes tracées sur une surface sont beaucoup plus simples lorsque l'on rapporte les points de cette surface à un système orthogonal tracé sur la surface. Nous prendrons désormais pour variables nouvelles les quantités u et v liées aux précédentes par les relations

$$\rho + \rho_1 = u, \quad \rho - \rho_1 = v.$$

Il est bien évident d'ailleurs que l'on passera sans difficulté d'une équation entre u et v à une équation entre les ρ et ρ_1.

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$m = a^2 + b^2 + c^2 - \rho_2, \quad p = a^2 + b^2 + c^2 + \rho_2,$$

on aura

$$\lambda = \frac{m}{2} + \frac{v}{2}, \quad \mu = \frac{m}{2} - \frac{v}{2}, \quad \nu = \frac{p}{2} - \frac{u}{2};$$

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{c^2 - b^2}{8M}[(m - 2a^2)^2 - v^2](p - u - 2a^2) = P(k - w)(l - u), \\ y^2 &= \frac{a^2 - c^2}{8M}[(m - 2b^2)^2 - v^2](p - u - 2b^2) = P'(k' - w)(l' - u), \\ z^2 &= \frac{b^2 - a^2}{8M}[(m - 2c^2)^2 - v^2](p - u - 2c^2) = P''(k'' - w)(l'' - u), \end{aligned} \right.$$

P, P', P''; k, k', k''; l, l', l'' désignant des constantes et $w = v^2$.

Ces dernières formules, qui donnent x, y, z en fonction de deux paramètres u et w, nous paraissent les plus simples que l'on puisse trouver pour étudier la géométrie des lignes tracées sur une surface d'onde ρ_2.

On en déduira

$$dx = \frac{x}{2}\left(\frac{du}{u-l} + \frac{dw}{w-k}\right),$$
$$dy = \frac{y}{2}\left(\frac{du}{u-l'} + \frac{dw}{w-k'}\right),$$
$$dz = \frac{z}{2}\left(\frac{du}{u-l''} + \frac{dw}{w-k''}\right)$$

et

$$ds^2 = E du^2 + G dw^2,$$

en posant

$$(5)\quad \begin{cases} 4E = P\,\dfrac{w-k}{u-l} + P'\,\dfrac{w-k'}{u-l'} + P''\,\dfrac{w-k''}{u-l''} \\ \quad = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{w-(u+m-p)^2}{(u-p+2a^2)(u-p+2b^2)(u-p+2c^2)}, \\ 4G = P\,\dfrac{u-l}{w-k} + P'\,\dfrac{u-l'}{w-k'} + P''\,\dfrac{u-l''}{w-k''} \\ \quad = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{(u+m)(w+H)+L-mH}{[w-(m-2a^2)^2][w-(m-2b^2)^2][w-(m-2c^2)^2]}, \end{cases}$$

L et H désignant des constantes.

Adoptons les notations de Gauss, c'est-à-dire posons

$$dx = a\,du + a'\,dw, \quad dy = b\,du + b'\,dw, \quad dz = c\,du + c'\,dw,$$

il vient

$$a = \frac{x}{2}\,\frac{1}{u-l}, \quad b = \frac{y}{2}\,\frac{1}{u-l'}, \quad c = \frac{z}{2}\,\frac{1}{u-l''};$$
$$a' = \frac{x}{2}\,\frac{1}{w-k}, \quad b' = \frac{y}{2}\,\frac{1}{w-k'}, \quad c' = \frac{z}{2}\,\frac{1}{w-k''}.$$

Posons aussi

$$d^2x = \alpha\,du^2 + 2\alpha'\,du\,dw + \alpha''\,dw^2,$$
$$d^2y = \beta\,du^2 + 2\beta'\,du\,dw + \beta''\,dw^2,$$
$$d^2z = \gamma\,du^2 + 2\gamma'\,du\,dw + \gamma''\,dw^2;$$

on aura

$$\alpha = -\frac{x}{4}\,\frac{1}{(u-l)^2},$$
$$\alpha' = \frac{x}{4}\,\frac{1}{(u-l)(w-k)},$$
$$\alpha'' = -\frac{x}{4}\,\frac{1}{(w-k)^2},$$

$$\beta = -\frac{y}{4}\frac{1}{(u-l')^2},$$
$$\beta' = \frac{y}{4}\frac{1}{(u-l')(w-k')},$$
$$\beta'' = -\frac{y}{4}\frac{1}{(w-k')^2},$$
$$\gamma = -\frac{z}{4}\frac{1}{(u-l'')^2},$$
$$\gamma' = \frac{z}{4}\frac{1}{(u-l'')(w-k'')},$$
$$\gamma'' = -\frac{z}{2}\frac{1}{(w-k'')^2}.$$

Soient $A = bc' - cb'$, $B = ca' - ac'$, $C = ab' - ba'$, il vient

$$(6)\quad \begin{cases} A = \dfrac{yz}{4}\left[\dfrac{1}{(u-l')(w-k'')} - \dfrac{1}{(u-l'')(w-k')}\right], \\ B = \dfrac{zx}{4}\left[\dfrac{1}{(u-l'')(w-k)} - \dfrac{1}{(u-l)(w-k'')}\right], \\ C = \dfrac{xy}{4}\left[\dfrac{1}{(u-l)(w-k')} - \dfrac{1}{(u-l')(w-k)}\right]. \end{cases}$$

Enfin posons

$$(7)\quad \begin{cases} E' = A\alpha + B\beta + C\gamma, \\ F' = A\alpha' + B\beta' + C\gamma', \\ G' = A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma''; \end{cases}$$

on trouvera aisément

$$(7\,bis)\quad \begin{cases} E' = -\dfrac{xyz}{16}\left[\dfrac{l-l'}{(u-l)^2(u-l')^2(w-k'')} + \dfrac{l'-l''}{(u-l')^2(u-l'')^2(w-k)} + \dfrac{l''-l}{(u-l'')^2(u-l)^2(w-k')}\right], \\ F' = \dfrac{xyz}{16}\left[\dfrac{kl'-k'l+k'l''-k''l'+k''l-kl''}{(u-l)(u-l')(u-l'')(w-k)(w-k')(w-k'')}\right], \\ G' = -\dfrac{xyz}{16}\left[\dfrac{k-k''}{(w-k)^2(w-k'')^2(u-l')} + \dfrac{k'-k}{(w-k')^2(w-k)^2(u-l'')} + \dfrac{k''-k'}{(w-k'')^2(w-k')^2(u-l)}\right]. \end{cases}$$

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES LIGNES DE COURBURE D'UNE SURFACE D'ONDE.

On sait que l'équation différentielle des lignes de courbure d'une surface est (voir Salmon, *Géométrie*, p. 253)

$$\begin{vmatrix} dw^2 & -du\,dw & du^2 \\ E & F & G \\ E' & F' & G' \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant,

$$(8) \qquad GF'dw^2 + (GE' - EG')du\,dw - EF'du^2 = 0;$$

et, si l'on remarque que l'on a

$$d\sigma_1 = \sqrt{E}\,du, \quad d\sigma = \sqrt{G}\,dw,$$

$$\sqrt{EG}\,F'd\sigma^2 + (GE' - EG')d\sigma\,d\sigma_1 - \sqrt{EG}\,F'd\sigma_1^2 = 0.$$

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES LIGNES ASYMPTOTIQUES.

L'équation différentielle des lignes asymptotiques sera

$$E'du^2 + 2F'du\,dw + G'dw^2 = 0$$

(Salmon, *ibid.*, p. 256).

RAYON DE COURBURE D'UNE SECTION NORMALE.

La formule qui donne le rayon de courbure d'une section normale à la surface d'onde ρ_2 passant par le point u, w et par le point infiniment voisin $u + du$, $w + dw$ est

$$\rho = \frac{(E\,du^2 + G\,dw^2)V}{E'du^2 + 2F'du\,dw + G'dw^2},$$

où

$$V = \sqrt{EG}$$

(Salmon, *ibid.*, p. 255).

GÉNÉRALISATION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.

Toutes les *propriétés descriptives* démontrées pour les surfaces précédentes s'étendent aux surfaces obtenues par une transformation homographique. Or M. Cayley a démontré que la surface des ondes ordinaire n'est qu'un cas particulier d'une surface qu'il a nommée *tétraédroïde* et dont il a donné l'équation en coordonnées homogènes. Le tétraédroïde n'est autre que la transformée homographique de la surface des ondes.

On peut donc conclure de ce qui précède que, si l'on transforme par l'homographie les surfaces d'ondes étudiées précédemment, on obtiendra un système triple de tétraédroïdes, lesquels seront inscrits dans une même développable du huitième ordre et de quatrième classe.

Mais le tétraédroïde de M. Cayley n'est lui-même qu'un cas particulier de la surface de Kummer du quatrième ordre à seize points singuliers. Il y a donc lieu d'étendre les résultats précédents à ces dernières surfaces.

On sait, en effet, que la surface de Kummer à seize points singuliers est la surface des singularités d'un complexe de droites du deuxième degré, c'est-à-dire le lieu des points de l'espace où le cône complexe du second degré se décompose en deux plans (Klein, *Mathematische Annalen*, t. II, p. 216). On sait aussi que si ce complexe du second degré est formé par des droites telles que l'on puisse mener de chacune d'elles deux plans tangents rectangulaires à un ellipsoïde, la surface des singularités est la surface des ondes ordinaire (Painvin, *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. II, p. 368).

Le travail précédent me paraît établir un lien entre

les complexes du second degré et les systèmes de surfaces homofocales.

DE LA PARTITION DES NOMBRES;

PAR M. J.-B. POMEY.

Soit proposée l'équation

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ldots + m\lambda_m = n,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ne pouvant recevoir que les valeurs 0 ou 1.

J'appelle A_n^m le nombre de systèmes différents de valeurs pour λ_1, λ_2, ..., λ_m qui vérifient cette égalité. Autrement dit, A_n^m est le nombre de solutions de l'équation

(1) $$\sum_{i=1}^{i=m} i\lambda_i = n.$$

Voici quelques propriétés des nombres A_n^m :

Première proposition. — A tout système de valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ correspond un système de valeurs λ'_1, $\lambda'_2, \lambda'_3, \ldots, \lambda'_m$, tel que l'on a, quel que soit i, $\lambda_i + \lambda'_i = 1$. Dès lors, à la solution $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de l'équation (1) correspond une solution de l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=m} i\lambda_i = \frac{m(m+1)}{2} - n,$$

et cette solution est $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_m$, et réciproquement. On a donc $A_n^m = A_{n'}^m$ pour $n + n' = \dfrac{m(m+1)}{2}$.

Deuxième proposition. — Le nombre A_n^m est égal au

nombre de solutions de l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=m-1} i\lambda_i = n,$$

augmenté du nombre de solutions de l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=m-1} i\lambda_i = n - m;$$

car λ_m ne peut avoir que les valeurs o et 1. Nous avons ainsi partagé les solutions en deux groupes : dans le premier, $\lambda_m = 0$; dans le second, $\lambda_m = 1$. Donc

$$A_n^m = A_n^{m-1} + A_{n-m}^{m-1}.$$

Troisième proposition. — J'attribue aux λ toutes les valeurs qu'ils peuvent avoir; j'aurai alors A_0^m fois le nombre o, A_1^m fois le nombre 1, A_i^m fois le nombre i et $A_{\frac{m(m+1)}{2}}^m$ fois le nombre $\frac{m(m+1)}{2}$, en formant toutes les combinaisons des deux signes $+1$ et o pour les λ dans $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + m\lambda_m$.

Or je formerai le Tableau des diverses combinaisons obtenues pour

$$\lambda_m, \lambda_{m-1}, \lambda_{m-2}, \ldots, \lambda_3, \lambda_2, \lambda_1,$$

en écrivant tous les nombres de la numération binaire, et ayant soin de remplacer par des zéros les chiffres manquant sur la gauche; je m'arrêterai au nombre 111...1, le nombre des unités étant m.

J'aurai le Tableau suivant :

λ_m	λ_{m-1}	λ_{m-2}	...	λ_4	λ_3	λ_2	λ_1
o	o	o	...	o	o	o	o
o	o	o	...	o	o	o	1
o	o	o	...	o	o	1	o
.	.	.	...	o	o	1	1

.	.	.	...	0	1	0	0
.	.	.	...	0	1	0	1
.	.	.	...	0	1	1	0
.	.	.	...	0	1	1	1
.	.	.	...	1	0	0	0
.	.	.	...	1	0	0	1
0	0	0	...	1	0	1	0
.	.	.	...	1	0	1	1
.	.	.	...	.	.	.	.
1	.	.	...	.	.	.	.
1	.	.	...	.	.	.	.
1	.	.	...	.	.	.	.
1	1	1	...	1	1	1	1

Dans chaque colonne, j'ai le même nombre d'unités : 2^{m-1}. Donc

$$\Sigma\lambda_1 = \Sigma\lambda_2 = \ldots = \Sigma\lambda_m = 2^{m-1},$$

et, par suite, j'ai

$$\begin{aligned} & A_0^m 0 + A_1^m 1 + A_2^m 2 + \ldots + A_{\frac{m(m+1)}{2}}^m \frac{m(m+1)}{2} \\ & = 1\Sigma\lambda_1 + 2\Sigma\lambda_2 + \ldots + m\Sigma\lambda_m \\ & = 2^{m-1}(1+2+3+\ldots+m) = \frac{m(m+1)}{2} 2^{m-1}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{i=0}^{i=\frac{m(m+1)}{2}} i A_i^m = 2^{m-1}\frac{m(m+1)}{2}.$$

Quatrième proposition. — On vient de voir, dans le cours de la précédente démonstration, que le nombre des lignes du Tableau qui y a été formé est 2^m. D'où

$$\sum_{i=0}^{i=\frac{m(m+1)}{2}} A_i^m = 2^m.$$

Cinquième proposition. — Si l'on a $\sum_{i=1}^{i=m} i\lambda_i = N$ et

qu'on remplace λ_1 par $1-\lambda_1$, valeur aussi admissible pour λ_1 dans le système total des valeurs que peut prendre $\Sigma i\lambda_i$, à toute valeur N paire correspondra par cette substitution une valeur impaire N', et réciproquement. On a donc

$$\Sigma(-1)^i A_i^m = 0;$$

le nombre des valeurs paires obtenues est égal au nombre des valeurs impaires.

Sixième proposition. — Supposons que

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + m\lambda_m$$

donne une valeur paire $4n$, et soit $\lambda_2 + \lambda'_2 = 1$, alors $\lambda_1 + 2\lambda'_2 + \ldots + m\lambda_m$ donnera la valeur $n' = 4n + 2$ ou $n' = 4n - 2$, suivant que λ_2 est nul ou égal à 1. Cette simple remarque montre que le nombre des valeurs pairement paires de $\Sigma i\lambda_i$ est égal au nombre de ses valeurs impairement paires. Donc

$$A_0^m - A_2^m + A_4^m - \ldots = 0.$$

De même le nombre de ses valeurs de la forme $4n+1$ est égal au nombre de ses valeurs de la forme $4n+3$, ou bien

$$A_1^m - A_3^m + A_5^m - \ldots = 0.$$

Septième proposition. — Je remarque que, en ajoutant ± 3 aux nombres $6m$, $6m \pm 1$, $6m \pm 2$, $6m \pm 3$, on obtient des nombres de la forme $6m \pm 3$, $6m \mp 2$, $6m \mp 1$, $6m$.

A une valeur de $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + m\lambda_m$ donnant un nombre de l'une des formes $6m$ ou $6m \pm 1$ correspond, pour $\lambda_3 + \lambda'_3 = 1$, un nombre de l'une des formes $6m \pm 3$ et $6m \pm 2$, et réciproquement. Donc

$$\Sigma A_i^m = \Sigma A_j^m,$$

si i parcourt tous les nombres de la forme $6m$ ou bien

$6m \pm 1$, j parcourant tous les nombres de la forme $6m \pm 3$ ou bien $6m \pm 2$.

Huitième proposition. — Celle-ci est la plus importante de toutes.

On a

$$(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^m)$$
$$= A_0^m + A_1^m x + A_2^m x^2 + \ldots + A_{\frac{m(m+1)}{2}}^m x^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Cette identité est évidente.

En changeant x en $\frac{1}{x}$ et comparant les résultats, en faisant $x = -1$ ou $x = \sqrt{-1}$ ou $x = 1$, ou en prenant la dérivée des deux membres, on obtient aisément tous les résultats qui précèdent.

Neuvième proposition. — Je pose

$$f(x) = (1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^m);$$

d'où

$$\log f(x) = \log(1+x) + \log(1+x^2) + \ldots + \log(1+x^m),$$
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \ldots + \frac{mx^{m-1}}{1+x^m}.$$

Or on a

$$\frac{px^{p-1}}{1+x^p} = px^{p-1}(1 - x^p + x^{2p} - x^{3p} + \ldots),$$

ou

$$\frac{px^{p-1}}{1+x^p} = px^{p-1} - px^{2p-1} + px^{3p-1} - px^{4p-1} + \ldots.$$

Quand le terme en x^{i-1} peut-il provenir du développement de $\frac{px^{p-1}}{1+x^p}$? Il faudra qu'on ait

$$kp - 1 = i - 1 \quad \text{ou} \quad i = kp,$$

c'est-à-dire que p soit un diviseur de i, et alors x^{kp-1} est affecté du coefficient $(-1)^k p$.

On a donc

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum B_{i-1}^m x^{i-1},$$

en posant

$$B_{i-1}^m = \sum^{i} (-1)^p p,$$

la sommation portant sur les nombres p moindres que m ou au plus égaux à m et qui sont des diviseurs de i.

Remarquons que, si le nombre des facteurs m croît indéfiniment, p désignera un facteur quelconque de i, ainsi que $\frac{i}{p}$, et que, alors, on a

$$\lim B_{i-1}^m = i \sum \frac{(-1)^\delta}{\delta},$$

δ parcourant tous les diviseurs de i. Or, en chassant le dénominateur $f(x)$ et égalant les coefficients des termes en x^{i-1}, on a

$$i A_i^m = A_0^m B_{i-1}^m + A_1^m B_{i-2}^m + A_2^m B_{i-3}^m + \ldots + A_{i-1}^m B_0$$

et

$$i \lim A_i^m = \sum_{k=0}^{k=i-1} \lim A_k^m B_{i-k-1}^m \quad (\text{pour } m = \infty);$$

et, en posant $\lim A_i^m = A_i$, $\lim B_i^m = i B_i$, on aurait

$$A_i + \sum_{k=0}^{k=i-1} A_k B_{i-k-1} = 0.$$

Cette formule de récurrence fait connaître les A en fonction des B supposés connus ; et ces B représentent l'excès de la somme des inverses des diviseurs pairs de i sur l'excès de la somme des inverses des diviseurs impairs de i.

Dixième proposition. — Autre série récurrente. On a

$$\frac{1}{1+x^p} = 1 - x^p + x^{2p} - x^{3p} + \ldots;$$

ainsi, en conservant la signification donnée plus haut à $f(x)$,

$$\frac{1}{f(x)} = (1 - x + x^2 - x^3 \ldots)(1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots)$$
$$\times (1 - x^3 + x^5 \ldots) \ldots (1 - x^m + x^{2m} \ldots),$$

et, en posant

$$\frac{1}{f(x)} = \sum C_i^m x^i,$$

on aura

$$C_i^m = \sum (-1)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ étant des entiers positifs pris de toutes les façons, tels qu'on ait

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + m\lambda_m = i.$$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m$ est le nombre des parties égales ou inégales, mais non supérieures à m dont la somme fait i, et C_i^m est l'excès du nombre des décompositions en un nombre pair de parties sur le nombre des décompositions en un nombre impair de parties.

On aura, en chassant le dénominateur,

$$C_0^m = 1, \quad C_1^m A_0^m + C_0^m A_1^m = 0, \quad \ldots$$

et

$$C_i^m A_0^m + C_{i-1}^m A_1^m + \ldots + C_0^m A_1^m = 0.$$

Exemple I. — On a

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1-x}{1-x^4}$$
$$= (1-x)(1+x^4)(1+x^8)\ldots$$
$$= 1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^8 + \ldots,$$

et l'on déduit de là : le nombre des partitions paires (telles que le nombre des parties soit pair) du second ordre d'un nombre de la forme $4n + 2$ ou $4n + 3$ est égal à celui de ses partitions impaires.

Mais, si le nombre est de la forme $4n$ ou $4n+1$, l'un de ces nombres de partitions surpasse l'autre d'une unité.

Exemple II. — On a

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)} = \frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}}{(1+x)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x^2} - \frac{\frac{1}{3}x}{1-x+x^2}.$$

On a, d'ailleurs,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^2} &= \left(-\frac{1}{1+x}\right)' \\ &= (-1+x-x^2\ldots)' = 1-2x+3x^2-4x^3+\ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}}{(1+x)^2} &= \sum(-1)^n(n+1)x^n\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right) \\ &= \sum x^n\left[(-1)^n\frac{n+1}{2}+(-1)^{n-1}\frac{n}{2}\right].\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}&(-1)^n\frac{n+1}{2}+(-1)^{n-1}\frac{n}{3} \\ &\quad = (-1)^n\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}-\frac{n}{3}\right) = (-1)^n\frac{n+3}{6},\end{aligned}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{1+x^2} = \sum\frac{(-1)^p}{2}x^{2p},$$

et enfin

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1+x}{1+x^3} &= (1+x)\sum(-1)^q x^{3q} \\ &= \sum(-1)^q x^{3q}+\sum(-1)^q x^{3q+1}\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\frac{-\frac{1}{3}x}{1-x+x^2} = \sum\frac{(-1)^{q+1}}{3}x^{3q+1}+\sum\frac{(-1)^{q+1}}{3}x^{3q+2}.$$

Cela posé, en appelant Δ l'excès du nombre des partitions paires sur le nombre des partitions impaires, on

aura le Tableau suivant :

$$n = 6m \ldots\ldots\ldots \quad \Delta = (-1)^n \frac{n+3}{6} + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2} = \frac{n+3}{6} + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2},$$

$$n = 6m+1 \ldots\ldots \quad \Delta = -\frac{n+3}{6} + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{3}+1}}{3} \quad (ex. : n = 7, \quad \Delta = -2).$$

$$n = 6m+2 \ldots\ldots \quad \Delta = \frac{n+3}{6} + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2} + \frac{(-1)^{\frac{n-2}{3}+1}}{3},$$

$$n = 6m+3 \ldots\ldots \quad \Delta = -\frac{n+3}{6},$$

$$n = 6m+4 \ldots\ldots \quad \Delta = \frac{n+3}{6} + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2} + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{3}+1}}{3},$$

$$n = 6m+5 \ldots\ldots \quad \Delta = -\frac{n+3}{6} + \frac{(-1)^{\frac{n-2}{3}+1}}{3}.$$

Remarque I. — On a identiquement

$$\frac{1}{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n)} = \frac{1}{(1+a)\ldots(1+a^{n-1})} - \frac{a^n}{(1+a)\ldots(1+a^n)},$$

$$\frac{1}{(1+a)\ldots(1+a^{n-1})} = \frac{1}{(1+a)\ldots(1+a^{n-2})} - \frac{a^{n-1}}{(1+a)\ldots(1+a^{n-1})},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{1+a} = 1 - \frac{a}{1+a},$$

d'où

$$\frac{1}{(1+a)\ldots(1+a^n)} = 1 - \frac{a^n}{(1+a)\ldots(1+a^n)} - \frac{a^{n-1}}{(1+a)\ldots(1+a^{n-1})} - \ldots - \frac{a}{1+a}.$$

Donc, en appelant C_i^n l'excès du nombre de manières dont on peut décomposer i en une somme d'un nombre pair de parties entières, égales ou inégales non supérieures à n, sur le nombre des manières dont on peut le décomposer en une somme d'un nombre impair de parties entières, égales ou inégales non supérieures à n, on

aura la formule suivante, pour $i > n$,

$$C_i^n + C_{i-n}^n + C_{i-(n-1)}^{n-1} + C_{i-(n-2)}^{n-2} + \ldots + C_{i-1}^1 = 0,$$

et, pour $i < n$, il faut supprimer les termes dont les indices sont négatifs.

Remarque II. — Considérons les m nombres 1, 2, 3, ..., m; on peut les combiner n à n d'un nombre de façons égal à

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots m}.$$

Soit $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \delta = i$ une de ces combinaisons, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$ désignant n nombres pris parmi les n premiers nombres entiers. De même, je combine par addition les nombres de chaque combinaison. Soit A_i le nombre de fois que le nombre i se trouve répété. Le signe Σ portant alors sur tous les nombres analogues à i, on aura

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} = \sum A_i.$$

Donnons à n les valeurs 0, 1, 2, ..., m, et ajoutons les égalités semblables à la précédente, nous aurons, en nous rappelant que la somme des coefficients du binôme est égale à 2^m, et en désignant par B_i le nombre des façons de décomposer i en une somme de parties entières inégales non supérieures à m,

$$2^m = \Sigma B_i.$$

GÉNÉRALISATION DE L'IDENTITÉ DE MM. TCHÉBYCHEW ET DE POLIGNAC;

PAR M. E. CESARO.

1. *$p(x)$ étant le produit des nombres premiers, non supérieurs à x, soit*

(1) $$P_r(x) = p\left(x^{\frac{1}{r}}\right)p\left(x^{\frac{1}{2r}}\right)p\left(x^{\frac{1}{3r}}\right)\ldots;$$

on a identiquement

(2) $$P_r\left[\frac{n}{1}\right] P_r\left[\frac{n}{2}\right] P_r\left[\frac{n}{3}\right]\ldots = 1^{F_r\left[\frac{n}{1^r}\right]} 2^{F_r\left[\frac{n}{2^r}\right]} 3^{F_r\left[\frac{n}{3^r}\right]}\ldots.$$

Dans cette égalité, $F_r(x)$ représente la quotité des nombres entiers, non supérieurs à x, et n'admettant pas de diviseurs, autres que 1, qui soient des puissances $r^{\text{ièmes}}$ parfaites.

2. Soit $f(x)$ une fonction de x, généralement égale à l'unité, sauf lorsque $x = \varpi^m$, ϖ étant un nombre premier quelconque, et m étant divisible par r : dans ce cas, $f(x) = \varpi$. Cela posé, désignons par $a, b, c, \ldots$ tous les diviseurs de x, et évaluons, en fonction des facteurs premiers $u, v, w, \ldots$ de x, le produit

$$f(a)f(b)f(c)\ldots.$$

Soit $x = u^\alpha v^\beta w^\gamma \ldots$. On a

$$f(u^r) = f(u^{2r}) = f(u^{3r}) = \ldots = f\left(u^{\left[\frac{\alpha}{r}\right]r}\right) = u,$$

$$f(v^r) = f(v^{2r}) = f(v^{3r}) = \ldots = f\left(v^{\left[\frac{\beta}{r}\right]r}\right) = v,$$

. . . .

Il est évident qu'il n'y a pas d'autres diviseurs de x

pour lesquels la fonction f soit différente de l'unité; par conséquent

$$f(a)f(b)f(c)\ldots = u^{\left[\frac{\alpha}{r}\right]} v^{\left[\frac{\beta}{r}\right]} w^{\left[\frac{\gamma}{r}\right]}\ldots = d_r(x),$$

pourvu que l'on représente par $d_r^r(x)$ le plus grand diviseur de x, puissance $r^{\text{ième}}$ parfaite. Si l'on observe que les nombres $\frac{x}{a}, \frac{x}{b}, \frac{x}{c}, \ldots$ sont égaux, dans un certain ordre, aux nombres $a, b, c, \ldots$, on peut écrire

$$f\left(\frac{x}{a}\right) f\left(\frac{x}{b}\right) f\left(\frac{x}{c}\right)\cdots = d_r(x).$$

3. Dans la dernière relation, faisons successivement $x = 1, 2, 3, \ldots, n$, et multiplions membre à membre toutes les égalités obtenues. Le nombre t entre, dans le premier membre, en dénominateur, pour les valeurs suivantes de x,

$$t,\ 2t,\ 3t,\ \ldots\ \left[\frac{n}{t}\right]t,$$

et, par conséquent, il donne lieu au produit

$$f\left[\frac{t}{t}\right] f\left[\frac{2t}{t}\right]\cdots f\left(\frac{\left[\frac{n}{t}\right]t}{t}\right) = f(1)f(2)\ldots f\left[\frac{n}{t}\right],$$

égal à $P_r\left[\frac{n}{t}\right]$, si l'on pose

(3) $$P_r(x) = f(1)f(2)f(3)\ldots f(x).$$

Faisant varier t, depuis 1 jusqu'à n, on obtient

(4) $$P_r\left[\frac{n}{1}\right] P_r\left[\frac{n}{2}\right] P_r\left[\frac{n}{3}\right]\cdots = d_r(1)\,d_r(2)\ldots d_r(n).$$

4. La fonction P_r est *définie* par la relation (3), que l'on peut mettre sous une autre forme. A cet effet, distinguons parmi les x premiers nombres naturels : 1° ceux qui sont des puissances $r^{\text{ièmes}}$ parfaites de nombres

premiers, et dont les racines $r^{\text{ièmes}}$ sont, par conséquent, *tous les nombres premiers, non supérieurs à* $x^{\frac{1}{r}}$; ces nombres donnent lieu, dans le second membre de (3), au produit $p\left(x^{\frac{1}{r}}\right)$; 2° ceux qui sont des puissances $(2r)^{\text{ièmes}}$ parfaites de nombres premiers, et dont les racines $(2r)^{\text{ièmes}}$ sont, par conséquent, *tous les nombres premiers, non supérieurs à* $x^{\frac{1}{2r}}$; ces nombres donnent lieu, dans le second membre de (3), au produit $p\left(x^{\frac{1}{2r}}\right)$; 3° etc. D'après cela, on peut écrire

$$P_r(x) = p\left(x^{\frac{1}{r}}\right)p\left(x^{\frac{1}{2r}}\right)p\left(x^{\frac{1}{3r}}\right)\ldots,$$

ainsi que le suppose la relation (1).

5. Transformons aussi le second membre de l'égalité (4). A cet effet, observons que, pour avoir $d_r(x) = t$, il faut d'abord que x soit un multiple de t^r : il faut, ensuite, que le quotient de x par t^r n'admette pas de diviseurs, autres que 1, qui soient des puissances $r^{\text{ièmes}}$ parfaites. Le nombre des valeurs de x, non supérieures à n, pour lesquelles $d_r(x) = t$, est donc égal à la quotité des nombres, non supérieurs à $\frac{n}{t^r}$ et n'admettant pas de diviseurs autres que 1, qui soient des puissances $r^{\text{ièmes}}$ parfaites. L'identité (2) est donc démontrée.

6. *Remarque.* — Pour $r = 1$, on a $F_1(x) = 1$, pourvu que x ne soit pas nul. Dans ce cas, on a toujours $F_r(0) = 0$. Conséquemment, l'identité (2) devient

$$P_1\left[\frac{n}{1}\right] P_1\left[\frac{n}{2}\right] P_1\left[\frac{n}{3}\right]\cdots = 1.2.3\ldots n.$$

C'est l'identité de MM. Tchebychew et de Polignac.

Il est probable que l'identité (2) conduit aussi à une généralisation des intéressants résultats auxquels MM. Tchebychew et de Polignac sont parvenus, dans le cas particulier de $r = 1$. Il convient, toutefois, de faire observer que P_r n'est pas une fonction essentiellement nouvelle, car elle dépend de P_1 par la relation

$$P_r(x) = P_1(\sqrt[r]{x}).$$

La formule (2) exprime donc une propriété de la fonction $P_1(x) = e^{\chi(x)}$, sur laquelle nous reviendrons ultérieurement, en la considérant comme le *plus petit multiple commun des x premiers nombres naturels* (¹).

7. On reconnaît aisément que, si l'on représente par $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \ldots$ la série des nombres premiers $2, 3, 5, \ldots$, on a

$$(5)\quad \begin{cases} F_r(x) = x - \sum\left[\dfrac{x}{\varpi_1^r}\right] \\ \qquad\qquad + \sum\left[\dfrac{x}{\varpi_1^r\varpi_2^r}\right] - \sum\left[\dfrac{x}{\varpi_1^r\varpi_2^r\varpi_3^r}\right] + \ldots \end{cases}$$

Asymptotiquement,

$$F_r(x) = x\left(1 - \frac{1}{\varpi_1^r}\right)\left(1 - \frac{1}{\varpi_2^r}\right)\left(1 - \frac{1}{\varpi_3^r}\right)\cdots = \frac{x}{s_r}.$$

Nous déduisons de là ce théorème :

La probabilité qu'un nombre entier n'admette pas de diviseurs, autres que 1, *qui soient des puissances* $r^{\text{ièmes}}$ *parfaites, est exprimée par l'inverse de la somme* $1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \ldots$.

En particulier, pour $r = 4$, on trouve qu'*il y a envi-*

(¹) $\chi(x)$ est la *fonction de Tchebychew*. D'après M. Halphen, elle est *asymptotique à x*.

ron douze à parier contre un qu'un nombre entier, pris au hasard, n'admet pas de diviseurs bicarrés, autres que l'unité.

8. La formule (5) peut être mise sous la forme

$$F_r(x) = \left[\frac{x}{1^r}\right]\mu(1) + \left[\frac{x}{2^r}\right]\mu(2) + \left[\frac{x}{3^r}\right]\mu(3) + \ldots\text{(}^1\text{)},$$

et l'on peut alors en déduire, avec plus de rigueur, l'expression asymptotique de $F_r(x)$. Observons, à cet effet, que, dans le second membre, les termesdont le rang est supérieur à $x^{\frac{1}{r}}$ sont nuls. On peut donc, à chaque quotient $\left[\frac{x}{t^r}\right]$, substituer $\frac{x}{t^r}$; car, en opérant ainsi, on vient à négliger une quantité certainement inférieure à la valeur absolue de $\mu(1) + \mu(2) + \ldots + \mu\left(x^{\frac{1}{r}}\right)$, et, partant, d'un ordre non supérieur à celui de $x^{\frac{1}{r}}$. Conséquemment, si r surpasse 1, on peut écrire

$$F_r(x) = x\sum_{t=1}^{t=\infty}\frac{\mu(t)}{t^r} = \frac{x}{s_r}.$$

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1883

(PREMIÈRE SESSION);

SOLUTION PAR M. E. BARISIEN.

On donne deux axes Ox, Oy, *un point* A *sur* Ox, *un point* B *sur* Oy :

---

(1) La fonction $\mu(x)$, égale à *zéro* lorsque x admet des diviseurs *carrés*, autres que l'unité, est égale, dans les autres cas, à ± 1, suivant que le nombre des *facteurs premiers* de x est *pair* ou *impair*. (Voir *Premier Mémoire d'Arithmétique*.)

1° *Former l'équation générale des paraboles telles que, pour chacune d'elles, Oy soit la corde de contact des tangentes menées du point A, et Ox la corde de contact des tangentes menées du point B.*

2° *Trouver le lieu des points de rencontre de chacune des paraboles avec celui de ses diamètres qui passe par un point H donné sur Oy.*

On déterminera un nombre de conditions géométriques suffisant pour pouvoir tracer le lieu, et l'on cherchera comment doit être placé le point H, pour que le lieu se réduise à des droites.

3° *Déterminer le paramètre variable que renferme l'équation générale du 1°, de façon qu'elle représente une parabole passant par un point donné P, et chercher dans quelles régions du plan doit se trouver le point P, pour que le problème soit possible.*

I.

Soient $OA = a$, $OB = b$, $OH = h$.

L'équation générale d'une parabole est

$$(Ax + By)^2 + 2Dx + 2Ey + 1 = 0. \tag{1}$$

La polaire d'un point (x, y) a pour équation

$$(Ax + By)(AX + BY) + D(X + x) + E(Y + y) + 1 = 0:$$

l'équation de la polaire du point A est, par suite,

$$Aa(AX + BY) + D(X + a) + EY + 1 = 0$$

ou

$$X(A^2a + D) + Y(ABa + E) + Da + 1 = 0.$$

Pour que cette droite se confonde avec l'axe des y, il faut que l'on ait

$$Da + 1 = 0, \tag{2}$$

$$ABa + E = 0. \tag{3}$$

Pour que la polaire du point B soit l'axe des x, il faut que l'on ait de même

$$(4)\qquad Eb + 1 = 0,$$

$$(5)\qquad ABb + D = 0.$$

Il semblerait que les quatre relations (2), (3), (4), (5) vont donner les valeurs de A, B, D, E; mais, en tenant compte des équations (2) et (4), les équations (3) et (5) rentrent l'une dans l'autre. Nous avons

$$D = -\frac{1}{a}, \quad E = -\frac{1}{b}, \quad ABab = 1.$$

L'équation générale des coniques satisfaisant aux conditions de l'énoncé est donc

$$(6)\qquad (Ax + By)^2 - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0,$$

A et B étant liés par la relation

$$(7)\qquad ABab = 1.$$

II.

$(Ax + By) = 0$ représentant la direction de l'axe de la parabole, l'équation d'un diamètre passant par le point H est

$$(8)\qquad Ax + B(y - h) = 0.$$

Pour avoir le lieu demandé, il suffit d'éliminer A et B entre (6), (7) et (8). Or

$$\frac{A}{h - y} = \frac{B}{x} = \frac{Ax + By}{hx} = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{x(h-y)}} = \frac{1}{\sqrt{ab\,x(h-y)}}.$$

Donc

$$(Ax + By)^2 = \frac{h^2 x}{ab(h - y)}.$$

En égalant cette valeur de $(Ax + By)^2$ à celle donnée

par l'équation (6), il vient, pour l'équation du lieu,

$$\frac{h^2 x}{ab(h-y)} = \left(\frac{2x}{a} + \frac{2y}{b} - 1\right)$$

ou, en ordonnant et réduisant,

$$(9) \quad 2ay^2 + 2bxy - hx(2b-h) - ay(b+2h) + abh = 0.$$

Ce lieu est donc une hyperbole passant par les trois points

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = h; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = \frac{b}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{ab}{2b-h}, \\ y = 0. \end{cases}$$

Les équations du centre sont

$$2by - h(2b-h) = 0,$$
$$2bx + 4ay - a(b+2h) = 0.$$

On construira donc facilement le centre et, par suite, les asymptotes dont les directions sont parallèles aux droites représentées par l'équation

$$y(bx + ay) = 0.$$

Calculons le discriminant Δ de la conique représentée par l'équation (9).

On a

$$\Delta = 2a\,\frac{h^2(2b-h)^2}{4} - 2b\,\frac{ah(2b-h)(b+2h)}{4} + ab^3 h$$

et, en réduisant,

$$\Delta = \frac{ah^2}{2}(b-h)^2.$$

Il en résulte que l'hyperbole se réduira à deux droites :

1° Pour $h = 0$, l'équation (9) devient

$$y(2bx + 2ay - ab) = 0.$$

2° Pour $h = b$, l'équation (9) devient, dans ce cas,

$$(2y - b)(bx + ay - ab) = 0.$$

III.

Exprimons que la parabole passe par un point donné $P(\alpha, \beta)$. On a

$$(10)\quad (A\alpha + B\beta)^2 - \frac{2\alpha}{a} - \frac{2\beta}{b} + 1 = 0, \quad \text{avec} \quad AB = \frac{1}{ab}.$$

Ne conservons que le paramètre variable A. L'équation (10) devient

$$\left(A\alpha + \frac{\beta}{Aab}\right)^2 = \frac{2\alpha}{a} + \frac{2\beta}{b} - 1$$

et, en réduisant et ordonnant par rapport à A,

$$A^4 a^2 b^2 \alpha^2 - A^2 ab(2b\alpha + 2a\beta - ab - 2\alpha\beta) + \beta^2 = 0.$$

Cette équation en A^2 n'aura ses racines réelles que si

$$(2b\alpha + 2a\beta - ab - 2\alpha\beta)^2 - 4\alpha^2\beta^2 > 0$$

ou

$$(4\alpha\beta - 2b\alpha - 2a\beta + ab)(2b\alpha + 2a\beta - ab) < 0$$

ou

$$(2\alpha - a)(2\beta - b)(2b\alpha + 2a\beta - ab) < 0.$$

Si le point (α, β) est sur une des trois droites

$$(1)\qquad x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad 2bx + 2ay - ab = 0,$$

il ne passe par ce point qu'une seule parabole satisfaisant à la question.

Soient A' le milieu de OA, B' le milieu de OB et C' le milieu de AB. Les côtés du triangle A'B'C', représentés par les équations (1), partagent le plan en deux régions. Si le point P est dans l'intérieur du triangle A'B'C', ou dans les angles opposés par le sommet aux angles intérieurs du triangle, il n'y a pas de parabole réelle. Si le point P est dans le reste du plan, il passe deux paraboles réelles par ce point.

La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

QUESTIONS PROPOSÉES PAR M. RÉALIS
(voir 3ᵉ série, t. II, p. 370);

SOLUTIONS DE M. FAUQUEMBERGUE,
Professeur au lycée de Nice.

I. L'équation

$$x^4 - 2\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \alpha^4 + \beta^2 = 0,$$

dans laquelle α est un entier quelconque et β un entier différent de zéro et de $\pm 4\alpha^2$, n'a pas de racine entière.

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(2\alpha x)^2 - (x^2 - \alpha^2)^2 = (2\alpha x + \beta)^2.$$

Or, on a identiquement

$$(2\alpha x)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2 = (x^2 + \alpha^2)^2.$$

Il en résulterait donc

$$(2\alpha x)^4 - (x^2 - \alpha^2)^4 = [(x^2 + \alpha^2)(2\alpha x + \beta)]^2,$$

équation impossible, car la différence de deux bicarrés ne peut être un carré.

Il y a exception pour $x^2 - \alpha^2 = 0$, $x = \pm \alpha$, avec la condition $\beta = 0$ ou $\beta = \pm 4\alpha^2$.

Note. — On peut consulter, au sujet de la proposition que nous venons de rappeler et de celles que nous rencontrerons plus loin, le Tome II de la *Théorie des Nombres*, de Legendre, ou un Mémoire de Lebesgue, inséré dans le *Journal de Liouville* (1853), sur la résolution des équations biquadratiques

$$z^2 = x^4 \pm 2^m y^4, \quad z^2 = 2^m x^4 - y^4, \quad 2^m z^2 = x^4 \pm y^4.$$

On y trouve, par exemple, que les équations

$$x^4 \pm y^4 = z^2, \quad x^4 \pm y^4 = 2z^2, \quad x^4 + 2y^4 = z^2,$$
$$x^4 \pm 4y^4 = z^2, \quad x^4 - 8y^4 = z^2$$

sont impossibles en nombres rationnels.

La plupart de ces propositions sont également démontrées dans les *Recherches sur l'Analyse indéterminée*, de M. E. Lucas (Moulins-sur-Allier, 1873).

II. L'équation

$$x^4 - 2\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \alpha^4 - 2\beta^2 = 0,$$

dans laquelle α est un entier quelconque et β un entier différent de zéro et de $\pm 2\alpha^2$, n'a pas de racine entière.

On voit immédiatement que l'équation peut s'écrire

$$x^4 + \alpha^4 = 2(\alpha x - \beta)^2.$$

Sous cette forme, on reconnaît qu'elle est impossible, excepté pour $x = \pm \alpha$ et $\beta = 0$, ou $\beta = \pm 2\alpha^2$.

III. L'équation

$$x^4 + (5\alpha^2 + 4\beta)x^2 + 2\alpha(2\alpha^2 + \beta)x + \alpha^4 - \beta^2 = 0,$$

dans laquelle α est un entier quelconque et β un entier différent de $\pm \alpha^2$ et de $3\alpha^2$, n'a pas de racine entière.

Cette équation revient à la suivante

$$(x + \alpha)^4 + 4x^4 = [2x^2 + \alpha x - \beta]^2,$$

dont l'impossibilité est connue.

Il y a exception pour $x = 0$, $\beta = \pm \alpha^2$ et $x = -\alpha$, $\beta = 3\alpha^2$.

IV. L'équation

$$x^4 - (5\alpha^2 + 4\beta)x^2 + 2\alpha(2\alpha^2 + \beta)x - (\alpha^4 - \beta^2) = 0,$$

dans laquelle α est un entier quelconque et β un entier différent de $\pm \alpha^2$, n'a pas de racine entière.

On peut l'écrire

$$(x - \alpha)^4 + 2x^4 = (2x^2 - \alpha x - \beta)^2:$$

elle n'est possible que pour $x = 0$, $\beta = \pm \alpha^2$.

V. L'équation

$$x^4 - \frac{\alpha^2+\beta}{2}x^2 + \alpha(\alpha^2+\beta)x - \frac{\alpha^4-\beta^2}{4} = 0,$$

où α et β sont des entiers de même parité, β étant différent de $\pm\alpha^2$, n'a pas de racine entière.

En la mettant sous la forme

$$(x-\alpha)^4 - 4x^4 = [x^2 - 2\alpha x - \beta]^2,$$

on reconnait qu'elle n'est possible que pour $x = 0$, $\beta = \pm\alpha^2$.

SOLUTIONS DES MÊMES QUESTIONS;

PAR M. S. RÉALIS.

I. *La forme $y^4 - 6y^2z^2 + z^4$, où y et z sont différents de zéro, ne peut jamais représenter un carré.*

(EULER.)

Cela étant, l'équation

$$(x+\alpha)^4 - 6(x+\alpha)^2(x-\alpha)^2 + (x-\alpha)^4 = 4(2\alpha x+\beta)^2,$$

c'est-à-dire

$$x^4 - 2\alpha^2x^2 + 4\alpha\beta x + \alpha^4 + \beta^2 = 0,$$

est impossible en entiers α, β, x, excepté :

1° Pour $x = -\alpha$; d'où

$$\beta = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = 4\alpha^2;$$

2° Pour $x = \alpha$; d'où

$$\beta = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = -4\alpha^2.$$

De là l'énoncé I.

II. *La forme $y^4 + 6y^2z^2 + z^4$, dans laquelle y et z*

sont différents de zéro, ne peut jamais représenter un carré. (EULER.)

Donc l'équation

$$(x+\alpha)^4+6(x+\alpha)^2(x-\alpha)^2+(x-\alpha)^4=16(\alpha x-\beta)^2,$$

c'est-à-dire

$$x^4-2\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\alpha^4-2\beta^2=0,$$

est impossible en entiers α, β, x; excepté :

1° Pour $x=-\alpha$; dans ce cas, on a

$$\beta=0 \quad \text{ou} \quad \beta=-2\alpha^2;$$

2° Pour $x=\alpha$; auquel cas on a

$$\beta=0 \quad \text{ou} \quad \beta=2\alpha^2.$$

III. *La forme $4x^4+y^4$, dans laquelle x et y sont différents de zéro, ne peut jamais représenter un carré.* (EULER.)

Donc l'équation

$$4x^4+(x+\alpha)^4=(2x^2+\alpha x-\beta)^2,$$

c'est-à-dire

$$x^4+(5\alpha^2+4\beta)x^2+2\alpha(2\alpha^2+\beta)x+\alpha^4-\beta^2=0,$$

est impossible en entiers α, β, x; excepté :

Pour $x=0$; d'où $\beta=\pm\alpha^2$;

Pour $x=-\alpha$; d'où

$$\beta=-\alpha^2 \quad \text{ou} \quad \beta=3\alpha^2.$$

IV. *La forme $2x^4+y^4$, dans laquelle x est différent de zéro, ne peut jamais représenter un carré.*

(EULER.)

D'après cela, l'équation

$$2x^4+(x-\alpha)^4=(2x^2-\alpha x-\beta)^2,$$

c'est-à-dire

$$x^4-(5\alpha^2+4\beta)x^2+2\alpha(2\alpha^2+\beta)x-(\alpha^4-\beta^2)=0,$$

ne peut être vérifiée en nombres entiers α, β, x, excepté pour $x = 0$; d'où $\beta = \pm \alpha^2$.

V. *La forme $y^4 - 4x^4$, dans laquelle x est différent de zéro, ne peut jamais représenter un carré.*

(EULER.)

Donc l'équation

$$(x-\alpha)^4 - 4x^4 = (x^2 - 2\alpha x - \beta)^2,$$

c'est-à-dire l'équation à coefficients entiers

$$x^4 - \frac{\alpha^2+\beta}{2}x^2 + \alpha(\alpha^2+\beta)x - \frac{\alpha^4-\beta^2}{4} = 0,$$

où nous supposons que α et β sont des nombres entiers de même parité, est impossible pour x entier, excepté pour $x = 0$, $\beta = \pm \alpha^2$.

NOTE SUR LES SOLUTIONS, EN NOMBRES ENTIERS, DE L'ÉQUATION

$$(1)\quad \frac{x^3+2}{5^2} = y,$$

OU L'ON SUPPOSE x IMPAIR [1].

Pour que $\frac{x^3+2}{5^2}$ représente un nombre entier, il faut évidemment que le chiffre des unités simples du nombre impair x soit 7.

En posant

$$x = 10n + 7,$$

il vient

$$x^3 + 2 = 10^3 n^3 + 3.7.10^2 n^2 + 3.7^2.10n + 345.$$

---

[1] Question proposée par un Abonné aux *Nouvelles Annales*.

Les deux termes $10^3 n^3$, $3.7.10^2 n^2$ sont divisibles par 5^2 et

$$3.7^2.10n + 345 = (3.7^2.2n + 69)5 = (7^2.2n + 23)15;$$

il faut donc que $7^2.2n + 23$ soit multiple de 5.

Or l'équation

$$7^2.2n + 23 = 5.z$$

est vérifiée par

$$n = 4 \quad \text{et} \quad z = 83;$$

d'où

$$n = 4 + 5t,$$

t, nombre entier quelconque; par suite,

$$10n = 40 + 5t, \quad 10n + 7 = 47 + 50t;$$

donc

$$x = 47 + 50t.$$

Ainsi, les valeurs positives de x forment une progression arithmétique dont le premier terme est 47, et la raison 50.

L'équation (1) fait connaître les valeurs correspondantes de y.

On voit que 47 est le plus petit nombre positif, impair, dont le cube augmenté de 2 est divisible par 25.

(G.).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1456

(voir 3e série, t. II, p. 336);

PAR M. DROZ.

Soient a, a'; b, b'; c, c' *les points d'intersection d'une conique et des côtés* BC, CA, AB *d'un triangle*

ABC; *démontrer que les six droites* Aa, Aa', Bb, Bb', Cc, Cc' *enveloppent une autre conique.*

(H. Schroeter.)

Solution.

On sait que les tangentes, menées des sommets A, B, C d'un triangle ABC, à une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe, rencontrent les côtés opposés BC, CA, AB respectivement, suivant des groupes de n points a, a', a'', ..., b, b', b'', ..., c, c', c'', ..., tels que la relation

$$\frac{aB}{aC}\cdot\frac{a'B}{a'C}\cdots\frac{bC}{bA}\cdot\frac{b'C}{b'A}\cdots\frac{cA}{cB}\cdot\frac{c'A}{c'B}\cdots=(-1)^n$$

est vérifiée. (Chasles, *Géométrie supérieure,* deuxième édition, p. 355, § 508.)

Les cinq droites Aa', Bb, Bb', Cc, Cc' enveloppent une conique déterminée; on peut lui mener du point A une seconde tangente, et, en désignant par X le point de rencontre de cette tangente et du côté BC, on aura, d'après la relation générale qui précède,

$$(1)\qquad \frac{XB}{XC}\cdot\frac{a'B}{a'C}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{b'C}{b'A}\cdot\frac{cA}{cB}\cdot\frac{c'A}{c'B}=1.$$

Mais, entre les segments déterminés sur les côtés du triangle ABC par cette conique, on a, d'après le théorème de Carnot,

$$(2)\qquad \frac{aB}{aC}\cdot\frac{a'B}{a'C}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{b'C}{b'A}\cdot\frac{cA}{cB}\cdot\frac{c'A}{c'B}=1.$$

Les égalités (1) et (2) donnent $\frac{XB}{XC}=\frac{aB}{aC}$; il en faut conclure que les points X, a coïncident : donc les six droites Aa, Aa', Bb, Bb', Cc, Cc' enveloppent une conique.

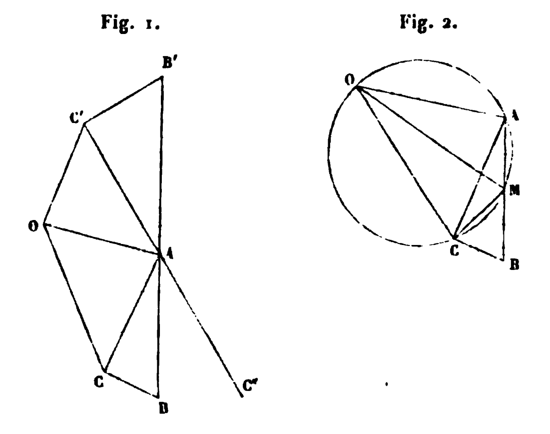
Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1461
(voir 3ᵉ série, t. II, p. 382);

PAR UN ANONYME.

Par un des points d'intersection A (*fig.* 1) *de deux hyperboles équilatères, de même centre* O, *on mène une sécante qui rencontre les deux courbes en* B, B'; *de ces points on abaisse des perpendiculaires* BC, B'C' *sur les tangentes aux deux courbes, au même point* A; *démontrer que l'angle* COC' *est quadruple de l'angle des asymptotes.* (E. FAUQUEMBERGUE.)

Tout se réduit à faire voir que l'angle COC' (*fig.* 1) est le double de l'angle CAC'' des tangentes AC, AC''; car on sait déjà que ce dernier angle est le double de



celui des asymptotes (*voir* 3ᵉ série, t. II, p. 332). Or l'égalité COC' = 2CAC'' résulte des considérations suivantes.

Soient A (*fig.* 2) un point d'une hyperbole équilatère dont O est le centre; AC une tangente; M le milieu

d'une corde AB, issue du point A; C la projection de l'extrémité B de cette corde sur la tangente.

L'angle AOM des droites OA, OM, menées du centre au point de contact A et au milieu M de la corde AB, est égal à l'angle CAM de la tangente et de la corde. C'est une proposition connue ([1]).

Mais, le point M étant le milieu de l'hypoténuse AB du triangle rectangle ACB, l'angle CAM = ACM; donc

$$AOM = ACM,$$

il s'ensuit que les quatre points A, M, C, O appartiennent à une même circonférence. Dans cette circonférence, les cordes AM, MC étant égales entre elles, les arcs sous-tendus AM, MC sont de même égaux; donc l'angle

$$AOC = 2CAM = 2CAB.$$

Ainsi (*fig.* 1), on a AOC = 2CAB, de même

$$AOC' = 2C'AB' = 2C''AB;$$

d'où

$$COC' = 2(CAB + C''AB) = 2CAC''.$$

C. Q. F. D.

Note. — MM. Moret-Blanc et Barisien ont résolu la même question au moyen des calculs de la Géométrie analytique.

([1]) En voici la démonstration. Soient D et D' les points de rencontre de l'une des deux asymptotes de l'hyperbole équilatère, et des droites CA, MA prolongées. On a AD = OA, MD' = OM; par suite les égalités d'angles :

$$AOD = ADO, \quad MOD' = MD'O, \quad MOD' - AOD = MD'O - ADO,$$

ou

$$AOM = DAD' = CAM. \qquad \text{(G.)}$$

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie et applications des sections homothétiques de deux quadriques, par M. *Ernest Lebon*, agrégé de l'Université, professeur au lycée Charlemagne. Gr. in-8, 1884.

Nous avons parcouru avec intérêt et signalons avec plaisir ce Mémoire de M. Ernest Lebon, où sont réunis en un seul corps et dépendent d'une seule formule les théorèmes relatifs aux sections homothétiques des diverses combinaisons de deux quadriques. On remarque dans ce travail, méthodiquement composé, écrit avec élégance et concision, des démonstrations généralement simples et originales, plusieurs remarques et propriétés qui n'avaient pas encore été signalées, notamment aux articles 10, 25, 26, 27, 37, et, comme application, une ingénieuse méthode de recherche des sections circulaires d'une quadrique.

Grâce aux théories que renferme ce Mémoire, on arrive à trouver, dans le cas de deux quadriques quelconques ayant un plan principal commun, le genre et les éléments de la conique projection sur ce plan de leur intersection, avec autant de facilité que dans le cas de deux quadriques de révolution.

Nous pensons que cet Opuscule, qui est terminé par plusieurs belles épures d'application des théories qu'il contient, peut être considéré comme un utile complément d'un cours de Géométrie descriptive comprenant l'étude des quadriques.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. Sur l'origine du monde. Théories cosmogoniques des anciens et des modernes; par *H. Faye*, de l'Institut. 2e édition. Paris, Gauthier-Villars; 1885.

2. Identité des principes de dualité et de polarité; par M. *Gaston Tarry*. Alger, Adolphe Jourdan, éditeur, imprimeur-libraire de l'Académie; 1885.

3. Revue mensuelle d'Astronomie populaire, de Météorologie et de Physique du globe, donnant le tableau permanent des découvertes et des progrès réalisés dans la connaissance de l'univers, publiée par *Camille Flammarion*, avec le concours des principaux astronomes français et étrangers (août 1885). — Paris, Gauthier-Villars.

4. American journal of Mathematics. Simon Newcomb, editor; Thomas Craig, associate editor. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. VII. Number 4 (juillet 1885). — Paris, Gauthier-Villars.

5. Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da *B. Boncompagni*, socio ordinario dell'Accademia pontificia de'Nuovi Lincei; socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; delle R. Accademie delle Scienze di Torino, e di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, e socio ordinario della R. Accademia delle Scienze di Berlino.

Tomo XVI, 1884 (1).

Settembre. — Étude sur Zarkali. Second article. — *Steinschneider*.

Supplément à la Notice sur un Ouvrage astronomique inédit d'Ibn Haitham (*Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche*), t. XIV, p. 721-740. M. *Steinschneider*.

Problèmes de Géométrie pratique de *Hydorge*, énoncés et

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. III, p. 336.

solutions publiés pour la première fois par M. *Charles Henry*.

Solutions des mêmes problèmes tirées d'Ouvrages orientaux; par M. *Léon Rodet*.

Ottobre. — Intorno ad un discorso : *Sopra la Calamita;* del *P.-D. Benedetto Castelli*. — *Antonio Favaro*.

Discorso inedito sopra la *Calamita* del P.-D. Benedetto Castelli, pubblicato secondo la lezione del codice della biblioteca nazionale di Firenze, sezione Palatina : *Discepoli di Galileo*, tomo I. Castelli Benedetto. — Notizie e Scritto (carte 191-206.)

Litterargeschichtliche Studien über Euklid von *J.-L. Heiberg*, Dr. Phil. Leipzig, Druck und Verlag von *B.-G. Teubner;* 1882, in-8° di 228 pagine (IV, 224). — *A. Favaro*.

Annunzi di recenti publicazioni.

Novembre. — Ricerche intorno a Paolo dal Pozzo Toscanelli. — *Gustavo Uzielli*.

Intorno alla vita ed ai lavori di *Sebastiano Purgotti*. — *Andrea Stiattesi*.

Dicembre. — Intorno a due quesiti proposti nella raccolta intitolata : *Giornale degli eruditi e curiosi* (anno I, vol. II, maggio-ottobre 1883). Padova, 4055 Riviero Businiella). — *B. Boncompagni*.

Bibliographie néerlandaise historico-scientifique, etc. Sommaire II. Aperçu sur quelques imprimeurs et éditeurs; par le Dr *Bierens de Haan*.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Tomo XVII, 1884.

Gennaio. — Intorno al : *Tractatus sphæræ* di *Bartolomeo da Parma*, astronomo del secolo xiii, e ad altri scritti del medesimo autore. — *Enrico Narducci*.

Tractatus sphæræ di *Bartolomeo da Parma*. Parti prima e seconda (Biblioteca Vittorio Emanuele, codice Santa Croce, n° 228, carte 47-83.)

Febbraio. — Tractatus sphæræ di *Bartolomeo da Parma*. Parti prima e seconda (Biblioteca Vittorio Emanuele, codice Santa Croce, n° 228, carte 47-83). — (Continuazione).

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Marzo. — Tractatus sphæræ di *Bartolomeo da Parma*. Parti prima e seconda (Biblioteca Vittorio Emanuele, codice Santa Croce, n° 228, carte 47-83) (fine).

Di alcune relazioni tra Galileo Galilei e Federico Cesi, illustrate con documenti inediti per cura di *Antonio Favaro*.

Aprile. — Alcune asserzioni di *C.-F. Gauss* circa le forme quadratici YY + ZZ. Nota di *Angelo Genocchi*.

Theoremi di *Sofia Germain* intorno ai residui biquadratici. Nota di *Angelo Genocchi*.

Sulla morte di *Marco Velsero*, e sopra alcuni particolari della vita di *Galileo*. Nota di *Antonio Favaro*.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Maggio. — Intorno ad una proposizione inesatta di *Sophia Germain*. — *A. Genocchi*. — *S. Realis*.

Pierre de Carcavy intermédiaire de Fermat, de Pascal et de Huygens, bibliothécaire de Colbert et du roi, directeur de l'Académie des Sciences; par M. *Charles Henry*.

Giugno. — Pierre de Carcavy intermédiaire de Fermat, de Pascal et de Huygens, bibliothécaire de Colbert et du roi, directeur de l'Académie des Sciences; par M. *Charles Henry* (fine).

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Luglio. — Correspondance de *René-François de Sluse*, publiée pour la première fois et précédée d'une introduction, par M. *C. Le Paige*, professeur de Géométrie supérieure à l'Université de Liège (continuazione).

Agosto. — Correspondance de *René-François de Sluse*, publiée pour la première fois et précédée d'une introduction, par M. *C. Le Paige*, professeur de Géométrie supérieure à l'Université de Liège (continuazione).

Annunzi di recenti pubblicazioni.

4. Atti della reale Accademia dei Lincei, anno CCLXXXII, 1884-1885; serie quinta. — Rendiconti pubblicati per cura dei Secretari. — Volume I, fascicolo 12°. — Seduta del 17 maggio 1885. Roma, tipografia della R. Accademia dei Lincei, 1885.

Tirages a part.

Nombre exact des variations gagnées ou perdues dans la multiplication du polynôme $f(x)$ par le binôme $x^h \pm a$; par M. D. André, 28 juillet 1884.

Abaissement des limites fournies par la règle des signes de Descartes; par M. D. André, 28 juillet 1884 (Extrait des *Comptes rendus*).

Note sur les raccordements paraboliques; par M. d'Ocagne (Extraits du *Mathesis*, t. V, 1885).

Procédé nouveau de calcul graphique; par M. d'Ocagne (*Annales des Ponts et Chaussées*, novembre 1884).

QUESTIONS.

1543. Si l'on considère les trois normales menées d'un point à une parabole et le triangle formé en menant les tangentes à leurs pieds; si l'on suppose ensuite que le point, d'où l'on mène les normales à la parabole, se déplace sur un diamètre de la courbes :

1° Tous les triangles des tangentes ont leurs sommets sur une même hyperbole équilatère;

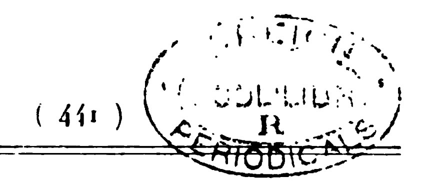
2° Tous ces triangles ont même point de rencontre des trois hauteurs;

3° Les cercles des neuf points de ces triangles passent par le sommet de la parabole;

4° Les centres des cercles des neuf points sont sur un même diamètre.

Enfin, comme généralisation du 2°,

5° Si l'on considère trois normales quelconques à une parabole (ne se coupant pas au même point), le point de rencontre des hauteurs du triangle des normales et le point de rencontre du triangle des tangentes sont sur un même diamètre. (Chauliac.)



LOI DE PROBABILITÉ DES ÉCARTS;

PAR M. PETICOL,
Capitaine d'Artillerie de Marine.

Nous étudions cette loi pour des expériences d'un genre particulier, pour lesquelles la probabilité de chaque écart peut être facilement calculée, sans que l'on ait besoin de recourir à aucune loi préconçue, ni à aucune hypothèse; puis, cette loi une fois trouvée, pour ce cas particulier, nous l'appliquons par analogie à toutes les expériences.

Voici en quoi consiste cette expérience : nous jetons en l'air m pièces de monnaie (pour cette théorie, il faut supposer m pair), et nous comptons à terre le nombre de piles et le nombre de faces.

L'expérience type est celle qui donnera autant de piles que de faces; quand l'expérience donnera n piles et $m-n$ faces, elle présentera un écart égal à $\frac{m}{2}-n$: ainsi, si l'on jette dix pièces en l'air et que l'on tourne trois piles et sept faces, l'écart de cette expérience est deux. Le plus grand écart que l'on puisse rencontrer est $\frac{m}{2}$: il a lieu quand on tourne tout pile ou tout face.

Voyons maintenant la probabilité de tourner n piles et $m-n$ faces. La probabilité d'obtenir une combinaison déterminée des n pièces supposées numérotées $1, 2, 3, \ldots, m$, telle, par exemple, que la première pièce soit une face, la deuxième une pile, la troisième une pile, etc., est évidemment $\frac{1}{2^m}$.

D'autre part, le nombre des combinaisons que l'on

peut former avec m pièces, en en tournant n piles et $m-n$ faces, est

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n};$$

car ce nombre est égal au nombre des combinaisons de m lettres n à n.

Par suite, la probabilité P_n de tourner n piles et $m-n$ faces dans une expérience est

$$\frac{1}{2^m}\times\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}=P_n.$$

Cas particuliers. — Pour avoir la probabilité de tourner autant de piles que de faces, il faut, dans cette formule, faire $n=\frac{m}{2}$, ce qui donne

$$P_{\frac{m}{2}}=\frac{1}{2^m}\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{m}{2}}.$$

La probabilité de tourner m piles et o face est $\frac{1}{2^m}$.

En résumé, les probabilités de tourner m piles et o face, $m-1$ piles et 1 face, etc., jusqu'à 1 pile et $m-1$ faces, et o pile et m faces, sont données par les fractions

$$\frac{1}{2^m},\quad \frac{1}{2^m}\frac{m}{1},\quad \frac{1}{2^m}\frac{m(m-1)}{1.2},\quad \ldots,$$

$$\frac{1}{2^m}\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{m}{2}},\quad \ldots,\quad \frac{1}{2^m}\frac{m}{1},\quad \frac{1}{2^m}.$$

On reconnait là les coefficients du binôme multipliés par $\frac{1}{2^m}$. On vérifie que la somme de toutes ces probabi-

lités est égale à 1, car on a

$$2^m = (1+1)^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \ldots + \frac{m}{1} + 1$$

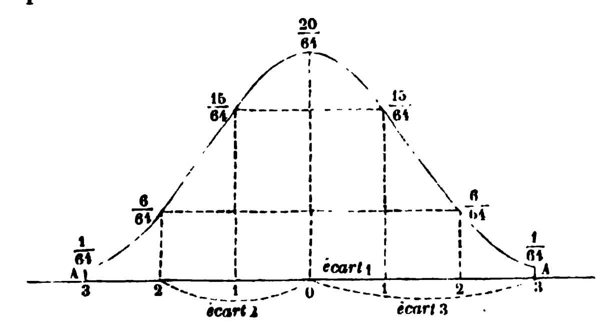
et, en divisant par 2^m,

$$1 = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m}\frac{m}{1} + \ldots + \frac{1}{2^m}\frac{m}{1} + \frac{1}{2^m}.$$

Applications. — Appliquons ces formules au cas où $m = 6$. Les sept combinaisons possibles sont

	6 piles.	5 piles.	4 piles.	3 piles.	2 piles.	1 pile.	0 pile.
Étant les probabilités...	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$.

Sur une droite horizontale, à droite et à gauche d'un point O, pris comme origine, portons successivement trois longueurs égales représentant l'écart 1 : en chacun de ces sept points, élevons des ordonnées proportionnelles aux probabilités, et joignons tous les sommets des ordonnées par un trait continu : nous obtiendrons la courbe ci-après.



Telle est la représentation graphique de la loi des écarts pour $m = 6$.

Écart moyen. — Pour avoir l'écart moyen dans

l'exemple précédent, on multipliera chaque écart par sa probabilité, et l'on fera la somme de tous ces produits ; ainsi l'écart 3, correspondant aux six piles, sera multiplié par $\frac{1}{64}$; l'écart 2 par $\frac{6}{64}$, ... Il y a un autre écart 3, correspondant aux six faces et o pile, etc., en sorte que l'écart moyen, dans ce cas, est égal à

$$\tfrac{6}{64}+\tfrac{24}{64}+\tfrac{30}{64}=\tfrac{60}{64}=\tfrac{15}{16}.$$

Nous allons traiter la même question pour m quelconque; pour cela, il faut multiplier tous les écarts par leur probabilité respective, et faire la somme de tous ces produits. Observons que, chaque écart se reproduisant deux fois avec la même probabilité, suivant que c'est le nombre des faces qui surpasse celui des piles ou inversement, il revient au même de ne le prendre qu'une fois et de doubler la fraction qui représente sa probabilité.

		Probabilité.
L'écart extrême est.	$\frac{m}{2}$	$\frac{2}{2^m}$
Ensuite vient l'écart.	$\frac{m}{2}-1$	$\frac{2}{2^m}\frac{m}{1}$
Puis...............	$\frac{m}{2}-2$	$\frac{2}{2^m}\frac{m(m-1)}{1.2}$
Puis...............	$\frac{m}{2}-3$	$\frac{2}{2^m}\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$
....		....
Puis...............	2	$\frac{2}{2^m}\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+3\right)}{1.2\ldots\left(\frac{m}{2}-2\right)}$
Et enfin............	1	$\frac{2}{2^m}\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+2\right)}{1.2\ldots\left(\frac{m}{2}-1\right)}.$

L'écart moyen est donc égal au produit

$$\frac{2}{2^m}\left[\frac{m}{2}+\frac{m}{1}\left(\frac{m}{2}-1\right)+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{m}{2}-2\right)+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+2\right)}{1.2\ldots\left(\frac{m}{2}-1\right)}1\right].$$

Faisons la somme des quantités entre parenthèses : Additionnons d'abord les deux premiers termes

$$\frac{m}{2}+\frac{m}{1}\left(\frac{m}{2}-1\right)=\frac{m(m-1)}{2.1}.$$

Ajoutons le troisième à ce premier total

$$\frac{m(m-1)}{2.1}+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{m}{2}-2\right)=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.1.2}.$$

Faisons de même pour le quatrième

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\left(\frac{m}{2}-3\right)$$
$$=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.1.2.3}.$$

En continuant ainsi de suite, on trouvera, pour la somme des quantités entre parenthèses, la fraction

$$\frac{m}{2}\,\frac{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\left(\frac{m}{2}-1\right)}.$$

Par suite, l'écart moyen γ_m est égal à (l'indice m est mis pour indiquer qu'il s'agit d'une expérience avec m pièces)

$$\frac{m}{2^m}\,\frac{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\left(\frac{m}{2}-1\right)}.$$

L'expression de l'écart moyen peut se mettre sous une autre forme. Changeons, dans la formule qui donne γ_m, m en $m+2$. Nous aurons

$$\gamma_{m+2} = \frac{m+2}{2^{m+2}} \frac{m+1}{1} \frac{m}{2} \frac{m-1}{3} \cdots \frac{\frac{m}{2}+2}{\frac{m}{2}}.$$

Par suite,

$$\frac{\gamma_{m+2}}{\gamma_m} = \frac{(m+2)(m+1)}{2^2 \frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}+1\right)} = \frac{m+1}{m}.$$

Or $\gamma_2 = \frac{1}{2}$; par suite,

$$\gamma_4 = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{3}{2}; \quad \gamma_6 = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{3}{2} \times \tfrac{5}{4}; \quad \gamma_8 = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{3}{2} \times \tfrac{5}{4} \times \tfrac{7}{6}.$$

Enfin

$$\gamma_m = \frac{1}{2} \frac{3.5.7\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots(m-2)}.$$

Quand m augmente indéfiniment, γ_m tend vers ∞ ; en effet, on peut écrire

$$\gamma_m = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m-2}\right).$$

En effectuant les multiplications, on voit que l'on a

$$\gamma_m > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{m-2}\right).$$

La somme des termes entre parenthèses augmente indéfiniment avec m; donc γ_m est infini pour $m=\infty$. Mais, quand m tend vers ∞, il en est de même de l'écart extrême $\frac{m}{2}$. Ainsi, quand on ne fixe pas de limite à l'écart extrême $\frac{m}{2}$ et qu'on admet qu'il peut devenir infiniment grand, bien qu'ayant une probabilité infiniment petite $\frac{2}{2^m}$, l'écart moyen n'a pas non plus de limite et

tend vers l'infini. Ce résultat était d'ailleurs évident *a priori*.

Quand on fait varier le nombre m des pièces de monnaie, le rapport de l'écart moyen à l'écart extrême, que nous appellerons K_m, varie également. On a

$$K_m = \frac{\gamma_m}{\frac{m}{2}} = \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots m};$$

ainsi

$$K_2 = \tfrac{1}{2},\quad K_4 = \tfrac{3}{8},\quad K_6 = \tfrac{5}{16},\quad K_8 = \tfrac{35}{128},\quad \ldots.$$

On peut remarquer que K_m est égal à $P_{\frac{m}{2}}$, c'est-à-dire à la probabilité de tourner autant de piles que de faces. K_m varie de $\frac{1}{2}$ à o, quand m varie de 2 à ∞.

Considérons maintenant les écarts qui se produisent dans d'autres espèces d'expériences moins mathématiques que celles que nous venons d'étudier. Supposons qu'il s'agisse de trouver la loi de répartition des écarts qui se produisent en portée, quand on tire un canon sous un angle constant. Les différentes mesures que l'on fera donneront l'écart moyen et l'écart extrême; on prendra le rapport de ces deux quantités, soit, pour fixer les idées : $\frac{5}{16}$ le rapport trouvé. Nous avons vu, en calculant le tableau des valeurs de K_m, que $K_6 = \frac{5}{16}$. On conclura, par analogie, que les écarts se répartissent dans le tir d'un canon sous un angle constant de la même façon que dans l'expérience de six pièces, c'est l'expérience que nous avons étudiée en détail (*voir* la figure); OA représente l'écart extrême en portée.

On se sert habituellement, pour représenter la loi de probabilité des écarts, de la courbe

$$y = c^2 e^{-a^2 x^2}$$

due à Laplace.

Cette formule suppose que les écarts peuvent devenir

infinis. C'est inadmissible; aussi allègue-t-on que si la formule suppose des écarts très grands, elle leur donne une probabilité très petite, et qu'elle peut être admise comme formule d'approximation.

Nous ne croyons pas cette approximation aussi grande qu'on veut bien le dire. En effet, l'équation

$$y = c^2 e^{-a^2 x^2},$$

tout en supposant des écarts infinis, donne un écart moyen fini, et nous avons trouvé le contraire pour l'expérience des pièces de monnaie.

On pourrait objecter à notre théorie qu'il est bien difficile de connaître l'écart extrême, par suite K_m; et qu'on sera embarrassé pour savoir à quel nombre de pièces de monnaie correspondent les expériences que l'on a en vue (tandis qu'avec la formule de Laplace on n'a pas cette difficulté).

Nous répondrons que notre théorie ne permet pas plus de résoudre un problème dont les données sont mal définies, que la Géométrie ne peut donner l'aire d'une surface dont les contours sont indéterminés; cela n'infirme en rien son exactitude.

QUESTIONS PROPOSÉES PAR M. E. CESARO.

1. Si d'un point quelconque d'une circonférence on mène des perpendiculaires aux côtés d'un triangle inscrit à une circonférence concentrique, le triangle formé par les pieds de ces perpendiculaires a une aire constante.

2. Soit ABC un triangle. D'un point P, pris sur la

bissectrice de l'angle A, on abaisse les perpendiculaires PA', PB', PC' aux côtés. Démontrer que les droites PA', B'C' se coupent sur la médiane issue de A.

Déduire, au moyen de cette propriété, la construction du rayon de courbure des coniques, due à M. Mannheim, de la construction due à M. Catalan.

3. 1° Il y a une infinité de polyèdres, à sommets trièdres, qui ne diffèrent que par le nombre de leurs faces hexagonales; mais il n'y en a pas deux qui ne diffèrent que par le nombre de leurs faces d'un autre ordre.

2° Il y a une infinité de polyèdres, à sommets tétraèdres, qui ne diffèrent que par le nombre de leurs faces quadrangulaires; mais il n'y en a pas deux qui ne diffèrent que par le nombre de leurs faces d'un autre ordre.

3° Il n'y a pas deux polyèdres, à sommets pentaèdres, qui ne diffèrent que par le nombre de leurs faces d'un certain ordre.

4. On considère une infinité de coniques ayant un contact du second ordre avec une courbe, en un point donné M. Démontrer que, si l'un des foyers décrit une conique tangente en M à la courbe, le second foyer décrit aussi une conique tangente à la courbe au même point.

5. On considère, en un point quelconque d'une surface développable, la génératrice rectiligne et une ligne géodésique. La tangente de l'angle de ces deux lignes est égale au rapport entre les angles de contingence et de torsion de la géodésique, au point considéré.

6. Soient α, β, γ, ... les nombres *premiers*, qui,

diminués de l'unité, entrent un nombre *impair* de fois dans $2n$ [1]. L'excès de la somme des n premiers *nombres de Bernoulli*, sur la somme des n nombres suivants, est égal à un nombre *entier*, augmenté de

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\ldots.$$

Il faut encore ajouter $\frac{1}{2}$, dans le cas de n *pair*.

7. Si l'on divise par le carré du logarithme de n le nombre des cas où l'inverse d'un nombre entier non supérieur à n a un développement décimal limité, le rapport obtenu tend vers

$$\frac{1}{2\log 2 \log 5}=2,376\ldots,$$

lorsque n augmente indéfiniment.

8. Soient x et y deux nombres entiers, variant séparément de 1 à n.

1° Si $\theta(x,y)$ est le *nombre des diviseurs communs* à x et y, on a

$$\lim \frac{\Sigma\theta(x,y)}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}=1,6449,$$

lorsque n augmente indéfiniment.

2° Si $\delta(x,y)$ est la différence entre la *somme des diviseurs communs* à x et y et le logarithme népérien de $\sqrt{xy}$, on a

$$\lim \frac{\Sigma\delta(x,y)}{n^2}=2C-\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{2}=0,8320.$$

---

(1) C'est-à-dire tels que les plus grands nombres entiers contenus dans $\frac{2n}{\alpha-1}$, $\frac{2n}{\beta-1}$, $\frac{2n}{\gamma-1}$, ... soient *impairs*.

9. On considère une ligne à double courbure. Démontrer que la surface engendrée par la droite, qui joint deux points correspondants des arêtes de rebroussement des surfaces *rectifiante* et *polaire,* est toujours gauche.

10. Soit δ_c l'excès du nombre des solutions entières, non négatives, de l'équation

$$ax + by = c$$

sur $\frac{c}{ab}$. Démontrer que, si n augmente indéfiniment,

$$\lim \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

11. Soit $f(x)$ le nombre des entiers premiers avec x, et non supérieurs au reste de la division de n par x. Démontrer que l'expression

$$\frac{1}{n}[f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)]$$

tend vers

$$\frac{6}{\pi^2} - \frac{1}{2},$$

quand n augmente indéfiniment.

12. On forme un déterminant de n^2 éléments : chaque élément est égal à 1, ou à 0, suivant que le plus grand commun diviseur entre ses deux indices est ou n'est pas un carré parfait. Soit, d'autre part, $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ la valeur du produit $2.3.4\ldots n$, décomposé en ses facteurs premiers. Démontrer que le déterminant proposé est égal à $(-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}$.

13. On considère les plus grands nombres entiers contenus dans $\frac{n^2}{2}$, $\frac{n^2}{3}$, $\frac{n^2}{4}$, ... Démontrer que la somme

des $n-1$ premiers est égale à la somme de tous les autres.

14. La probabilité que deux nombres quelconques admettent δ pour plus grand commun diviseur est $\frac{6}{(\pi\delta)^2}$.

15. Soit $\mu(n)$ une fonction, égale à $+1$ ou à -1, suivant que n est composé d'un nombre pair ou d'un nombre impair de facteurs premiers inégaux, autres que l'unité. Soit $\mu(n)=0$, dans les autres cas. Démontrer que

$$\lim \frac{\mu(1)+\mu(2)+\mu(3)+\ldots+\mu(n)}{n} = \frac{36}{\pi^4},$$

si n augmente sans limite. On suppose $\mu(1)=1$.

16. R_p étant le reste de la division de n par p, démontrer que l'on a

$$\lim \frac{1}{n^2}[R_1+R_2+R_3+\ldots+R_n] = 1-\frac{\pi^2}{12} = 0,1775\ldots,$$

$$\lim \frac{1}{n}\left[R_1+\tfrac{1}{2}R_2+\tfrac{1}{3}R_3+\ldots+\frac{1}{n}R_n\right] = 1-C = 0,4227\ldots,$$

$$\lim \frac{1}{n^2}\left[R_1^2+\tfrac{1}{2}R_2^2+\tfrac{1}{3}R_3^2+\ldots+\frac{1}{n}R_n^2\right]$$

$$= \tfrac{3}{2}-C-\frac{\pi^2}{12} = 0,1003\ldots,$$

lorsque n augmente indéfiniment. C est la *constante d'Euler*, 0,5772....

17. On considère les nombres de Bernoulli et d'Euler, définis par les égalités symboliques

$$(B+1)^p - B^p = p,$$

$$(E+1)^p + (E-1)^p = 0.$$

Démontrer la relation symbolique

$$f(2B+E) = 2f(B) - f(2B) + f'(E).$$

En particulier,

$$(2B + E)^p = p E_{p-1} - (2^p - 2) B_p.$$

18. Ayant posé

$$H(x) = \int_0^1 \frac{1 - \varphi^x}{1 - \varphi} d\varphi,$$

démontrer la formule

$$H(2x) - \tfrac{1}{2}[H(x) + H(x - \tfrac{1}{2})] \, l.2.$$

19. Soient S_n la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des plus grands nombres entiers contenus dans toutes les fractions de numérateur n ; et σ_n ce que devient cette somme lorsqu'on n'y considère que les fractions irréductibles. On a

$$\lim \frac{S_n}{\sigma_n} = 1 + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \frac{1}{4^{p+1}} + \ldots,$$

pour n infini.

20. Soit

$$y_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tang x \, dx}{e^{2k\pi \tang x} - 1}.$$

Démontrer que l'expression

$$ln - \frac{4}{n}\left[y_{\frac{1}{n}} + y_{\frac{2}{n}} + y_{\frac{3}{n}} + \ldots + y_{\frac{n}{n}}\right]$$

tend vers

$$2 - C = 1,422784\ldots,$$

quand n augmente indéfiniment.

21. Le rapport entre la somme des carrés des côtés d'un triangle et le carré de la somme des côtés est *le plus fréquemment* égal à $\frac{3}{8}$.

22. Quand une épicycloïde roule sur une droite, le

centre de courbure correspondant au point de contact, se trouve sur une ellipse fixe.

23. Quand une *développante de cercle,* ou une *chaînette,* roulent sur une droite, le centre de courbure, correspondant au point de contact, se trouve sur une parabole fixe.

24. Classer et étudier les courbes telles que, quand elles roulent sur une droite, le centre de courbure, correspondant au point de contact, se trouve sur une conique fixe.

25. Ayant brisé une barre en n morceaux, la probabilité que l'on puisse, avec ces morceaux, former un polygone, est $1 - \frac{n}{2^{n-1}}$.

26. Il y a environ 17 à parier contre 8 qu'un triangle, de périmètre donné, est *obtusangle* plutôt que *acutangle.*

27. Toute médiane d'un triangle est *le plus fréquemment* égale au quart du périmètre.

(*A suivre.*)

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE (SECONDE SESSION, OCTOBRE 1883)

(voir 3e série, t. III, p. 291);

SOLUTION PAR M. MORET-BLANC.

On donne dans un plan un rectangle ABCD *et un point quelconque* P; *par ce point on mène une droite de di-*

rection arbitraire **PR**; *des quatre sommets du rectangle, on abaisse des perpendiculaires* AA′, BB′, CC′, DD′ *sur cette droite.*

Cela posé, on demande de démontrer :

1° *Que, parmi toutes les droites* PR *issues du point* P, *il en existe une,* PR′, *pour laquelle la somme* r^2 *des carrés des distances des quatre sommets du rectangle à cette droite est maxima, et une autre,* PR″, *pour laquelle cette somme est minima;*

2° *Que les deux droites,* PR′ PR″ *sont rectangulaires;*

3° *Que le lieu géométrique des points* P *pour lesquels le maximum de* r^2 *conserve une valeur donnée* μ^2 *est une conique, et que la tangente à cette conique, au point* P *est la droite* PR′; *que, de même, le lieu des points* P *pour lesquels le minimum de* r^2 *conserve une valeur donnée* λ^2 *est une conique, et que la tangente à cette conique, au point* P, *est la droite* PR″;

4° *Que ces deux coniques sont homofocales et que leurs foyers communs sont indépendants des valeurs attribuées aux deux paramètres* μ^2, λ^2. *Donner la position de ces foyers et examiner en particulier le cas où l'une des dimensions du rectangle s'annulerait.*

1° Je prends pour origine des coordonnées rectangulaires le centre, O, du rectangle, et pour axes, des parallèles Ox, Oy, aux côtés AB, BC, dont je représente les longueurs par $2a$, $2b$; $a > b$.

Les coordonnées des sommets A, B, C, D sont respectivement

$$(-a, -b);\ (a, -b);\ (a, +b);\ (-a, +b).$$

Soient α, β les coordonnées du point P, l'équation

d'une droite PR, issue de ce point, est

$$y - \beta = m(x - \alpha);$$

d'où

$$\overline{AA'}^2 = \frac{[(b - ma) + (\beta - m\alpha)]^2}{m^2 + 1},$$

$$\overline{BB'}^2 = \frac{[(b + ma) + (\beta - m\alpha)]^2}{m^2 + 1},$$

$$\overline{CC'}^2 = \frac{[(b - ma) - (\beta - m\alpha)]^2}{m^2 + 1},$$

$$\overline{DD'}^2 = \frac{[(b + ma) - (\beta - m\alpha)]^2}{m^2 + 1},$$

en remarquant que l'on peut changer le signe de la quantité élevée au carré.

Il s'ensuit

$$\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2 + \overline{DD'}^2 = \frac{4(a^2 + \alpha^2)m^2 - 8\alpha\beta m + 4(b^2 + \beta^2)}{m^2 + 1} = r^2$$

ou, en chassant le dénominateur,

$$4\left(a^2 + \alpha^2 - \frac{r^2}{4}\right)m^2 - 8\alpha\beta m + 4\left(b^2 + \beta^2 - \frac{r^2}{4}\right) = 0,$$

ou

$$\left(a^2 + \alpha^2 - \frac{r^2}{4}\right)m^2 - 2\alpha\beta m + \left(b^2 + \beta^2 - \frac{r^2}{4}\right) = 0,$$

équation qui donne

$$m = \frac{4\alpha\beta \pm \sqrt{-r^4 + 4(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2)r^2 - 16(a^2b^2 + b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)}}{4\left(a^2 + \alpha^2 - \frac{r^2}{4}\right)}.$$

Décomposons en facteurs la quantité sous le radical, et à cet effet cherchons les racines r^2 de l'équation

$$r^4 - 4(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2)r^2 + 16(a^2b^2 + b^2\alpha^2 + a^2\beta^2) = 0.$$

Le coefficient de r^4 étant négatif, la plus grande racine sera un maximum, et la plus petite, un minimum.

On a

$$r^2 = 2(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2)$$
$$\pm 2\sqrt{(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2)^2 - 4(a^2b^2+b^2\alpha^2+a^2\beta^2)}$$
$$= 2(a^2+b^2+\alpha^2+b^2) \pm 2\sqrt{(a^2-b^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}.$$

Donc

$$2(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2)+2\sqrt{(a^2-b^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$$

est un maximum μ^2, et

$$2(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2)-2\sqrt{(a^2-b^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$$

un minimum λ^2 (¹).

Si le point P coïncidait avec le point O, le maximum serait $4a^2$ et le minimum $4b^2$; en général, le point P s'éloignant, le maximum sera plus grand que $4a^2$ et le minimum sera compris entre $4b^2$ et $4a^2$.

(¹) Pour que les valeurs de m soient réelles, il faut que la quantité

$$-r^4+4(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2)r^2-16(a^2b^2+b^2\alpha^2+a^2\beta^2)$$

soumise au radical soit positive ou nulle, ce qui revient à

$$r^4-4(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2)r^2+16(a^2b^2+b^2\alpha^2+a^2\beta^2) \leqq 0.$$

En désignant par μ^2 et λ^2 les valeurs de r^2 qui annulent ce dernier polynôme, on a

$$r^4-4(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2)r^2+16(a^2b^2+b^2\alpha^2+a^2\beta^2)$$
$$=(r^2-\mu^2)(r^2-\lambda^2),$$

où μ^2 et λ^2 sont des quantités réelles, positives et inégales.

Soit $\mu^2 > \lambda^2$; alors la relation

$$r^4-4(a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2)r^2+16(a^2b^2+b^2\alpha^2+a^2\beta^2 \leqq 0$$

entraîne évidemment les suivantes :

$$(r^2-\mu^2)\leqq 0,\quad r^2-\lambda^2 \geqq 0 \quad \text{ou} \quad r^2 \leqq \mu^2, \quad \text{et} \quad r^2 \geqq \lambda^2,$$

c'est-à-dire que μ^2 est un maximum, et λ^2 un minimum.

(G.)

2° Pour le maximum, le coefficient angulaire de PR′ est

$$m' = \frac{4\alpha\beta}{4a^2 + 4\alpha^2 - \mu^2}$$
$$= \frac{2\alpha\beta}{a^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \sqrt{(a^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}}$$
$$= \frac{a^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2 + \sqrt{(a^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}}{-2\alpha\beta}.$$

Pour le minimum, le coefficient angulaire de PR″ est

$$m'' = \frac{4\alpha\beta}{4a^2 + 4b^2 - \lambda^2}$$
$$= \frac{2\alpha\beta}{a^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2 + \sqrt{(a^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2)}}$$
$$= \frac{a^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \sqrt{(a^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}}{-2\alpha\beta};$$

d'où $m'm'' = -1$, ce qui prouve que les deux droites PR′, PR″ sont rectangulaires.

3° En regardant λ^2 et μ^2 comme des constantes α et β comme des variables, et faisant disparaître les radicaux des valeurs de μ^2 et λ^2, on a

$$4(\mu^2 - 4b^2)\alpha^2 + 4(\mu^2 - 4a^2)\beta^2 = (\mu^2 - 4a^2)(\mu^2 - 4b^2)$$

et

$$4(\lambda^2 - 4b^2)\alpha^2 + 4(\lambda^2 - 4a^2)\beta^2 = (\lambda^2 - 4a^2)(\lambda^2 - 4b^2).$$

Ces deux équations représentent deux coniques dont les axes sont dirigés suivant les axes des coordonnées. D'après la remarque faite plus haut (¹), la première est une ellipse, et la seconde une hyperbole, le grand axe de l'ellipse et l'axe transverse de l'hyperbole sont dirigés suivant Oy.

(¹) Cette remarque est que le maximum μ^2 est plus grand que $4a^2$, et le minimum λ^2 compris entre $4b^2$ et $4a^2$.

Le coefficient angulaire de la tangente à l'ellipse au point P est

$$-\frac{(\mu^2-4b^2)\alpha}{(\mu^2-4a^2)\beta}.$$

Désignons, pour abréger l'écriture, par R le radical

$$\sqrt{(a^2-b^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2};$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{\mu^2-4b^2}{\mu^2-4a^2}&=\frac{\alpha^2+\beta^2+a^2-b^2+R}{\alpha^2+\beta^2-(a^2-b^2)+R}\\ &=\frac{(\alpha^2+\beta^2+a^2-b^2+R)[\alpha^2+\beta^2-(a^2-b^2)-R]}{[\alpha^2+\beta^2-(a^2-b^2)]^2-R^2}\\ &=\frac{a^2-b^2+\alpha^2-\beta^2+R}{2\alpha^2};\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}&-\frac{(\mu^2-4b^2)\alpha}{(\mu^2-4a^2)\beta}\\ &=\frac{a^2-b^2+\alpha^2-\beta^2+\sqrt{(a^2-b^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}}{-2\alpha\beta}=m'.\end{aligned}$$

Pour l'hyperbole, il suffit de changer μ^2 en λ^2, et R en — R; ce qui donne

$$\begin{aligned}&-\frac{(\lambda^2-4b^2)\alpha}{(\lambda^2-4a^2)\beta}\\ &=\frac{a^2-b^2+\alpha^2-\beta^2-\sqrt{(a^2-b^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}}{-2\alpha\beta}=m''.\end{aligned}$$

Les tangentes aux deux coniques, au point P, sont donc les droites PR', PR''.

4° L'ellipse et l'hyperbole étant concentriques et se coupant orthogonalement, on pourrait déjà conclure qu'elles sont homofocales; c'est ce que démontre aussi la détermination directe de leurs foyers.

Les carrés des demi-axes de l'ellipse sont $\frac{\mu^2-4b^2}{4}$,

$\frac{\mu^2 - 4a^2}{4}$; leur différence $(a^2 - b^2)$ est le carré de la distance de chacun des foyers au centre, ces foyers sont situés sur l'axe Oy, leurs ordonnées sont

$$y = \pm \sqrt{a^2 - b^2}.$$

On trouve les mêmes valeurs pour les ordonnées des foyers de l'hyperbole.

Lorsque $b = 0$, les ordonnées des foyers sont $\pm a$.

Lorsque $a = 0$, les foyers sont sur Ox, et leurs abscisses sont $\pm b$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Barisien ; et Gaillardon. Jacques, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Rouen.

THÉORÈMES SUR L'ELLIPSE ET L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE;

PAR M. JUHEL-RÉNOY.

Théorème. — *On joint un point* M *d'une ellipse aux extrémités* A, A' *du grand axe. Soient* P, Q *les points d'intersection de* MA' *et* MA *avec la directrice relative au foyer* F.

L'angle PFQ *est droit* [1].

Réciproquement, si un segment PQ *de la directrice est vu du foyer* F *sous un angle droit, les droites* QA, PA' *se coupent sur l'ellipse.*

En effet, l'équation de l'ellipse étant

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

les équations des droites MA, MA' peuvent s'écrire

$$\frac{y}{b} = \lambda\left(1 - \frac{x}{a}\right), \quad \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{x}{a}\right).$$

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

Soit C le point d'intersection du grand axe et de la directrice, on a

$$\mathrm{PC} = \frac{b}{\lambda}\left(1 + \frac{a}{c}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{CQ} = -b\lambda\left(1 - \frac{a}{c}\right):$$

donc

$$\mathrm{PC}.\mathrm{CQ} = -b^2\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) = \frac{b^4}{c^2} = \overline{\mathrm{FC}}^2;$$

par conséquent, l'angle PFQ est droit.

Démontrons la réciproque.

Soient $\mathrm{PC} = y_1$ et $\mathrm{CQ} = -y_2$.

On a, par hypothèse,

$$y_1 y_2 = -\frac{b^4}{c^2}.$$

L'équation de PA′ est

$$\frac{y}{y_1} = \frac{x+a}{\frac{a^2}{c} + a},$$

et l'équation de QA

$$\frac{y}{y_2} = \frac{x-a}{\frac{a^2}{c} - a}.$$

On a donc, pour le lieu du point de rencontre des deux droites,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

équation de l'ellipse considérée.

Théorème. — *Soient* M *et* M′ *les extrémités de deux demi-diamètres conjugués* OM, OM′ *d'une ellipse, et* F *un foyer.*

La droite M′H *parallèle à* MF *est tangente au cercle décrit sur le petit axe comme diamètre.*

En effet, soient $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ l'équation de l'ellipse, et $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ l'abscisse et l'ordonnée du point M; les coordonnées de M′ seront $-a\sin\varphi$, $b\cos\varphi$,

et l'équation de M'H sera

(1) $$bx\sin\varphi - (bc + ay)\cos\varphi = -(ab + cy).$$

Pour avoir l'équation de l'enveloppe, prenons la dérivée de l'équation (1), par rapport à φ,

(2) $$bx\cos\varphi + (bc + ay)\sin\varphi = 0.$$

Élevons au carré les équations (1) et (2), et ajoutons-les ; nous aurons, pour l'équation de l'enveloppe,

$$x^2 + y^2 = a^2 - c^2 = b^2,$$

ce qui démontre la proposition.

Théorème. — *Soit un triangle rectangle inscrit dans une hyperbole équilatère :*

Les côtés de l'angle droit AB, AC *interceptent sur les asymptotes deux segments dont les milieux sont sur le cercle des neuf points du triangle.*

Prenons pour axes de coordonnées les deux côtés AB, AC ; et soient $AB = a$, $AC = b$.

L'équation d'une hyperbole équilatère circonscrite au triangle sera

$$x^2 - y^2 + \lambda xy - ax + by = 0.$$

Soit $y = cx + d$ l'équation d'une asymptote ; c et d vérifient les équations

$$1 - c^2 + \lambda c = 0,$$
$$(\lambda - 2c)d - a + bc = 0.$$

De ces deux équations on déduit, en éliminant λ,

(1) $$(c^2 + 1)d + ac - bc^2 = 0.$$

Or, pour démontrer la proposition énoncée, il suffit de faire voir que le point, dont les coordonnées sont

$$y = \frac{d}{2}, \quad x = -\frac{d}{2c} = -\frac{y}{c},$$

est sur le cercle des neuf points du triangle.

Remplaçons dans la relation (1) d par $2y$, et c par $-\frac{y}{x}$, nous aurons entre les coordonnées x, y l'équation

$$2(x^2+y^2)-ax-by=0,$$

qui représente le cercle des neuf points du triangle rectangle ABC.

La proposition est ainsi démontrée.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1885.

PREMIÈRE SESSION.

Géométrie analytique.

On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et le cercle représenté par l'équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0.$$

On considère la corde fixe AB menée par l'origine et partagée par ce point en deux parties égales, et une corde mobile CD, de direction constante, dont le coefficient angulaire est égal et de signe contraire à celui de la corde fixe AB.

On sait que, par les quatre points A, B, C, D, on peut faire passer deux paraboles P, P'.

Trouver, quand la corde CD se déplace parallèlement à elle-même :

1° Le lieu du point de rencontre des axes des deux paraboles P et P';

2° Le lieu du sommet et le lieu du foyer de chacune de ces paraboles.

Épure.

Un cylindre de révolution, dont le diamètre d est de $0^m,080$, touche les deux plans de projection.

Un cône, aussi de révolution, a pour trace horizontale un cercle tangent à la ligne de terre, dont le diamètre est égal à $2d$, et pour cote de son sommet $\frac{1}{2}d$.

On propose de construire :

1° Les deux projections et le *développement* de la partie Σ de la *surface* du cylindre comprise dans les deux nappes du cône;

2° La projection horizontale et la transformée par développement de l'intersection de la surface Σ avec un plan perpendiculaire au plan vertical, incliné de 45° sur le plan horizontal et passant par le sommet du cône.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour obtenir un point quelconque des projections et du développement des lignes d'intersection, et les tangentes en ces points. Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Titre extérieur : Géométrie descriptive;

Titre intérieur : Intersection d'un cône et d'un cylindre.

Placer la ligne de terre parallèlement aux grands côtés du cadre, à $0^m,170$ du grand côté inférieur, et les projections du sommet du cône à $0^m,130$ de la parallèle aux petits côtés du cadre, qui passe au milieu de la feuille.

Triangle.

On donne deux côtés a et b d'un triangle, ainsi que l'angle C qu'ils comprennent, à savoir

$$a = 63741^m,35,$$
$$b = 44623^m,77,$$
$$C = 117°35'43'',2.$$

On demande de déterminer les angles A, B, le côté c, ainsi que la surface du triangle.

Physique.

Un corps solide A flotte sur un liquide L à 0°, et le rapport de la portion de volume immergée au volume total est égal à C.

Connaissant le coefficient K de la dilatation cubique du corps A et le coefficient moyen λ de la dilatation absolue du liquide L, dans les limites de température de l'expérience, on demande à quelle température x l'immersion commencera à être totale.

Exemple numérique.

C....................	0,9635482
λ....................	0,0011045
K....................	0,0000228

Nota. — On emploiera les logarithmes.

Chimie.

1. Des propriétés chimiques du chlore. Application à la décoloration des tissus d'origine végétale.

2. On décompose totalement du gaz hydrogène bicarboné par du chlore; on obtient de l'acide chlorhydrique gazeux et un dépôt de charbon. On demande, dans le cas où l'on opère sur 1^{mc} de gaz hydrogène bicarboné mesuré à 0° et 760^{mm} :

1° Quel volume de chlore, mesuré à 0° et 760^{mm}, il faudra employer;

2° Quel volume d'acide chlorhydrique, mesuré à 0° et 760^{mm}, on obtiendra;

3° Quel poids de charbon sera mis en liberté.

On donne :

	Équivalents en volumes.
Hydrogène bicarboné............	4
Chlore.........................	2
Acide chlorhydrique............	4

	Équivalents en poids.
C..............................	6
Cl.............................	35,5
H..............................	1

Poids de 1^{lit} *à* $0°$ *et* 760^{mm} :

Chlore.........................	$3^{gr},18$
Acide chlorhydrique............	1,635
Hydrogène bicarboné............	1,254
Hydrogène......................	0,08958

On demande la solution du problème par les deux méthodes des équivalents en poids et des équivalents en volume.

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. G. Mittag-Leffler, Membre de l'Académie des Sciences, Professeur à l'Université de Stockholm, Rédacteur en chef des Acta Mathematica.

Permettez-moi de vous faire part de la Communication suivante qui paraîtra prochainement dans le journal *Acta Mathematica*, dont je suis le rédacteur en chef :

« Sa Majesté Oscar II, désireuse de donner une nouvelle preuve de l'intérêt qu'elle porte à l'avancement des Sciences mathématiques, intérêt qu'elle a déjà témoigné, en encourageant la publication du journal *Acta*

Mathematica, qui se trouve sous son auguste protection, a résolu de décerner le 21 janvier 1889, soixantième anniversaire de sa naissance, un prix à une découverte importante dans le domaine de l'Analyse mathématique supérieure. Ce prix consistera en une médaille, du dix-huitième module, portant l'effigie de Sa Majesté et ayant une valeur en or de mille francs, ainsi qu'en une somme de 2500 kronor en or (1 krona égale 1 franc 50 centimes environ).

» Sa Majesté a daigné confier le soin de réaliser ses intentions à une Commission de trois membres : M. Carl Weierstrass, à Berlin ; M. Charles Hermite, à Paris ; et le rédacteur en chef de ce Journal, M. Gösta Mittag-Leffler, à Stockholm. Le travail des commissaires a été l'objet d'un Rapport dont Sa Majesté a pris connaissance, et voici les conclusions auxquelles elle a donné son approbation :

» Prenant en considération les questions qui, à divers titres, préoccupent également les analystes, et dont la solution serait du plus grand intérêt pour les progrès de la Science, la Commission propose respectueusement à Sa Majesté d'accorder le prix au meilleur Mémoire sur l'un des sujets suivants :

» 1. Étant donné un système d'un nombre quelconque de points matériels qui s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton, on propose, sous la supposition qu'un choc de deux points n'ait jamais lieu, de représenter les coordonnées de chaque point sous forme de séries procédant suivant quelques fonctions connues du temps et qui convergent uniformément pour toute valeur réelle de la variable.

» Ce problème, dont la solution étendra considérablement nos connaissances par rapport au système du monde, paraît pouvoir être résolu à l'aide des moyens

analytiques que nous avons actuellement à notre disposition; on peut le supposer du moins, car Lejeune-Dirichlet a communiqué, peu de temps avant sa mort, à un géomètre de ses amis, qu'il avait découvert une méthode pour l'intégration des équations différentielles de la Mécanique, et qu'en appliquant cette méthode il était parvenu à démontrer d'une manière absolument rigoureuse la stabilité de notre système planétaire. Malheureusement nous ne connaissons rien sur cette méthode, si ce n'est que la théorie des oscillations infiniment petites paraît avoir servi de point de départ pour sa découverte [1]. On peut pourtant supposer, presque avec certitude, que cette méthode était basée, non point sur des calculs longs et compliqués, mais sur le développement d'une idée fondamentale et simple, qu'on peut avec raison espérer de retrouver par un travail persévérant et approfondi. Dans le cas pourtant où le problème proposé ne parviendrait pas à être résolu pour l'époque du concours, on pourrait décerner le prix pour un travail dans lequel quelque autre problème de la Mécanique serait traité de la manière indiquée et résolu complètement.

» 2. M. Fuchs a démontré dans plusieurs de ses Mémoires [2] qu'il existe des fonctions uniformes de deux

---

(1) *Voir* p. 35 de l'éloge de Lejeune-Dirichlet par Krummer, *Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1860.

(2) Les Mémoires se trouvent :

1° *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, février 1880, p. 170.

2° *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 89, p. 251. (Une traduction de ce Mémoire se trouve dans le *Bulletin* de M. Darboux, 2e série, t. IV.)

3° *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu*

variables, qui se rattachent par le mode de leur génération aux fonctions ultra-elliptiques, mais sont plus générales que ces dernières, et qui pourraient probablement acquérir une grande importance pour l'Analyse, si leur théorie était développée davantage.

» On propose d'obtenir, sous forme explicite, les fonctions dont l'existence a été prouvée par M. Fuchs, dans un cas suffisamment général, de manière qu'on puisse reconnaître et étudier leurs propriétés les plus essentielles.

» 3. L'étude des fonctions définies par une équation différentielle suffisamment générale du premier ordre dont le premier membre est un polynôme entier et rationnel par rapport à la variable, la fonction et sa première dérivée.

» MM. Briot et Bouquet ont ouvert la voie à une telle étude dans leur Mémoire sur ce sujet (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXVIe Cahier, p. 133-198). Les géomètres qui connaissent les résultats découverts par ces auteurs savent aussi que leur travail est loin d'avoir épuisé le sujet difficile et important qu'ils ont abordé les premiers. Il paraît probable que de nouvelles recherches, entreprises dans la même direction, pourront conduire à des propositions d'un haut intérêt pour l'Analyse.

Göttingen, juin 1880, p. 445. (Traduit en français, *Bulletin* de M. Darboux, 2ᵉ série, t. IV.)

4° *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 90, p. 71. (Aussi dans le *Bulletin* de M. Darboux, 2ᵉ série, t. IV.)

5° *Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1881. (*Bulletin* de M. Darboux, t. V.)

6° *Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1883, I, p. 507.

7° Le Mémoire de M. Fuchs, inséré dans le *Journal de Borchardt*, t. 76, p. 177, a aussi quelques rapports avec les Mémoires cités.

» 4. On sait quelle lumière a été portée sur la théorie générale des équations algébriques, par l'étude de ces équations spéciales auxquelles conduit la division du cercle en parties égales, et la division par un nombre entier de l'argument des fonctions elliptiques. La transcendante si remarquable qu'on obtient, en exprimant le module de la théorie des fonctions elliptiques par le quotient des périodes, mène semblablement aux équations modulaires qui ont été l'origine de notions entièrement nouvelles, et de résultats d'une grande importance, comme la résolution de l'équation du cinquième degré. Mais cette transcendante n'est que le premier terme, le cas particulier le plus simple d'une série infinie de nouvelles fonctions que M. Poincaré a introduites dans la Science sous la dénomination de *fonctions fuchsiennes,* et appliquées avec succès à l'intégration des équations différentielles linéaires d'un ordre quelconque. Ces fonctions, qui ont donc dans l'Analyse un rôle dont l'importance est manifeste, n'ont pas été considérées jusqu'ici sous le point de vue de l'Algèbre, comme la transcendante de la théorie des fonctions elliptiques, dont elles sont la généralisation. On propose de combler cette lacune et de parvenir à de nouvelles équations analogues aux équations modulaires, en étudiant, ne serait-ce que dans un cas particulier, la formation et les propriétés des relations algébriques qui lient deux fonctions fuchsiennes, lorsqu'elles ont un groupe commun.

» Dans le cas où aucun des Mémoires présentés pour le concours sur un des sujets proposés ne serait trouvé digne du prix, ce dernier pourra être adjugé à un Mémoire mis en concours, contenant la résolution complète d'une question importante de la théorie des fonctions, outre celles proposées par la Commission.

» Les Mémoires présentés au concours devront être

munis d'une épigraphe, ainsi que du nom et de l'adresse de l'auteur, sous pli cacheté, et adressés au Rédacteur en chef des *Acta Mathematica*, avant le 1er juin 1888.

» Le Mémoire auquel Sa Majesté daignera décerner le prix, ainsi que d'ailleurs le ou les Mémoires que la Commission estimera dignes d'une mention honorable, seront insérés dans les *Acta Mathematica*, et aucun d'entre eux ne doit être publié auparavant.

» Les Mémoires peuvent être rédigés dans telle langue que l'auteur voudra choisir; mais, comme les Membres de la Commission appartiennent à trois pays différents, l'auteur doit réunir à son Mémoire originaire une traduction française, si le Mémoire n'est pas déjà écrit en français. S'il n'y a pas de telle traduction, l'auteur doit accepter que la Commission en fasse faire une à son usage.

» La Rédaction des *Acta Mathematica*. »

Lettre de M. A. Mathieu, ancien colonel d'artillerie.

Veuillez me permettre de faire remarquer que la conjugaison *isogonale* de deux points, dont il est parlé dans un article de M. d'Ocagne, inséré au numéro d'août 1885 des *Nouvelles Annales*, est identique avec le premier des quatre modes de conjugaison de deux points, ou d'un point et d'une droite, dont j'ai fait connaître certaines propriétés dans ce Journal, en 1865 (2e série, vol. IV), par trois articles publiés sous ce titre : *Étude de Géométrie comparée*. J'avais dénommé ce mode de conjugaison : *Inversion trilinéaire*, terme auquel je ne tiens d'ailleurs aucunement; les théorèmes restent, et c'est l'essentiel.

J'ai été empêché par mes occupations de donner la

suite que j'entrevoyais à ces méthodes de transformation, dans lesquelles la construction d'une conique, par points ou par tangentes, est ramenée à la détermination d'une droite qui est la conjuguée ou d'un point qui est le conjugué de la courbe; mais je puis assurer aux lecteurs des *Nouvelles Annales*, que le sujet pourrait intéresser, qu'ils ne perdraient pas leurs peines en le travaillant.

Je vous demanderai de vouloir bien faire rectifier, par *errata*, plusieurs fautes d'impression qui dénaturent quelques-unes des formules de mon Mémoire de 1865.

J'ai l'honneur, etc.

Errata au Tome IV de la deuxième série des « Nouvelles Annales ».

Page 492. — *Au lieu de* (p, q) le centre du cercle conscrit au triangle, *lisez* (P, Q) le centre du cercle circonscrit au triangle.

Par suite, l'équation de la ligne conjuguée ou inverse de la conique doit s'écrire

$$(y - Q)\cos(\alpha + \alpha' + \alpha'') - (x - P)\sin(\alpha + \alpha' + \alpha'') + R\frac{M + N}{M - N} = 0.$$

Même page. — *Les formules* (2) *doivent être remplacées par les suivantes :*

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{M} &= \frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{R}\left(\frac{\Delta}{R}+1\right)^{-2}\left(\frac{\Delta}{R}-1\right)^{-1},\\ \frac{1}{N} &= \frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{R}\left(\frac{\Delta}{R}+1\right)^{-1}\left(\frac{\Delta}{R}-1\right)^{-2}.\end{aligned}\right.$$

Page 534. — *Au lieu de*

$$R = \frac{\frac{M}{N}+1}{\frac{M}{N}-1},\qquad \textit{lisez}\qquad \Delta = R\,\frac{\frac{M}{N}+1}{\frac{M}{N}-1}.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1449

(voir 3e série, t. II, p. 288);

PAR M. LOUIS M....

La somme des restes du nombre entier n, divisé par chacun des nombres entiers qui le précèdent, augmentée de la somme des diviseurs des nombres non supérieurs à n, est égale à n^2. (E. CESARO.)

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les quotients, et $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les restes obtenus en divisant n successivement par 1, 2, ..., n.

On a

$$n = q_1.1 + r_1,$$
$$n = q_2.2 + r_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n = q_n.n + r_n.$$

Ajoutons ces n égalités; il vient, en observant que $r_n = 0$,

$$n^2 = q_1.1 + q_2.2 + \ldots + q_n.n + r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1}.$$

D'après les égalités ci-dessus, la suite des nombres

$$1, 2, 3, \ldots, n$$

contient q_1 termes divisibles par 1, q_2 termes divisibles par 2, ..., et, pour finir, q_n termes par n. La somme de tous les diviseurs de cette suite est donc

$$q_1.1 + q_2.2 + \ldots + q_n n.$$

L'égalité précédente démontre ainsi le théorème.

Note. — M. Moret-Blanc a résolu la même question.

Question 1509

(voir 3 série, t. III, p. 495);

PAR M. F. PISANI.

ABC *étant un triangle donné, on joint ses sommets à un point,* O, *de son plan, par des lignes droites qui coupent les côtés* BC, CA, AB en A', B', C'; *soient*

a	*le milieu de*	BC;	a'	*le milieu de*	AA';
b	»	CA;	b'	»	BB';
c	»	AB;	c'	»	CC';

les trois droites aa', bb', cc' *concourent en un point* M, *centre de la conique qui touche les côtés du triangle aux points* A', B', C'.

Cela posé, on a la relation

$$\frac{OA.OB.OC}{OA'.OB'.OC'} = \frac{Ma.Mb.Mc}{Ma'.Mb'.Mc'} \quad (^1).$$

(H. SCHRÖTER.)

1° Les points c, b', a, milieux de AB, BB', BC, sont sur la droite ac, parallèle à AC, et l'on a

$$\frac{cb'}{b'a} = \frac{AB'}{B'C},$$

de même

$$\frac{ac'}{c'b} = \frac{BC'}{C'A} \quad \text{et} \quad \frac{ba'}{a'c} = \frac{CA'}{A'B};$$

d'où

$$\frac{cb'.ac'.ba'}{b'a.c'b.a'c} = \frac{AB'.BC'.CA'}{B'C.C'A.A'B} = 1:$$

donc les trois droites aa', bb', cc' concourent en un même point M.

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

2° Pour démontrer que le point M est le centre de la conique qui touche les côtés BC, CA, AB du triangle aux points A', B', C', remarquons qu'en prenant pour axes des x et des y les droites AC, AB, et désignant par α, β, γ les côtés BC, CA, AB du triangle, les équations de bb', cc' sont

$$(AB' - \beta)y - \gamma x + \tfrac{1}{2}\beta\gamma = 0,$$
$$-\beta y + (AC' - \gamma)x + \tfrac{1}{2}\beta\gamma = 0;$$

d'où l'on tire, entre les coordonnées x, y du point M, commun à ces deux droites, l'équation

$$AB'.y - AC'.x = 0,$$

qui représente la droite AM.

D'autre part, l'équation de la droite B'C' étant

$$\frac{x}{AB'} + \frac{y}{AC'} - 1 = 0,$$

les coordonnées du point de rencontre des droites AM et B'C' sont

$$x = \tfrac{1}{2}AB', \quad y = \tfrac{1}{2}AC',$$

ce qui montre que la droite AM passe par le milieu de la corde des contacts, B'C', des tangentes AC, AB; donc la droite AM est dirigée suivant un diamètre de la conique qui touche les côtés du triangle ABC aux points A', B', C'.

Il est clair que les droites BM, CM sont, de même, dirigées suivant des diamètres de cette courbe; par conséquent, le point M est le centre de la conique tangente aux côtés du triangle ABC, aux points A', B', C'.

3° Les triangles ABA', BCB', CAC' étant, respectivement, coupés par les transversales CC', AA', BB', on a

$$OA.A'C.BC' = OA'.BC.C'A,$$
$$OB.B'A.CA' = OB'.AC.A'B,$$
$$OC.C'B.AB' = OC'.BA.B'C;$$

d'où

$$\frac{OA.OB.OC}{OA'.OB'.OC'} = \frac{AB.BC.CA}{AB'.BC'.CA'}\,\frac{A'B.B'C.C'A}{AB'.BC'.CA'}.$$

Mais

$$\frac{A'B.B'C.C'A}{AB'.BC'.CA'} = 1:$$

donc

$$(1)\qquad \frac{OA.OB.OC}{OA'.OB'.OC'} = \frac{AB.BC.CA}{AB'.BC'.CA'}.$$

On ferait voir de même que, dans le triangle abc, on a

$$\frac{Ma.Mb.Mc}{Ma'.Mb'.Mc'} = \frac{ab.bc.ca}{ab'.bc'.ca'}$$

et, par suite,

$$(2)\qquad \frac{Ma.Mb.Mc}{Ma'.Mb'.Mc'} = \frac{2ab.2bc.2ca}{2ab'.2bc'.2ca'} = \frac{AB.BC.CA}{AB'.BC'.CA'}.$$

Les relations (1) et (2) donnent

$$\frac{OA.OB.OC}{OA'.OB'.OC'} = \frac{Ma.Mb.Mc}{Ma'.Mb'.Mc'};$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Goffart, et Louis M....

Question 1515

(voir 3e série, t. III, p. 543);

PAR M. E. BARISIEN.

On donne une ellipse; les normales à cette ellipse aux points P, Q *se rencontrent en* R, *de telle sorte que les droites* OR *et* PQ *sont également inclinées sur les axes,* O *étant le centre de l'ellipse. On demande de démontrer :*

1° *Que la partie de* PQ, *comprise entre les axes, est de longueur constante*;

2° *Que les deux autres normales menées de* R *à l'ellipse forment entre elles un angle droit.*

(WOLSTENHOLME.)

1° Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les coordonnées des points P et Q; (α, β) les coordonnées du point R;

$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

l'équation de l'ellipse;

$$(2) \qquad y = mx + n$$

l'équation de la droite PQ.

Nous allons chercher la relation qui lie les coefficients m, n, en exprimant que la droite OR a pour coefficient angulaire $-m$.

Le point R étant à l'intersection des deux normales PR, QR, on a, entre ses coordonnées α, β, les relations

$$a^2y_1\alpha - b^2x_1\beta = c^2x_1y_1 \quad \text{et} \quad a^2y_2\alpha - b^2x_2\beta = c^2x_2y_2,$$

qui donnent

$$\alpha = \frac{c^2x_1x_2(y_1-y_2)}{a^2(x_2y_1-x_1y_2)}, \quad \beta = \frac{c^2y_1y_2(x_1-x_2)}{b^2(x_2y_1-x_1y_2)}.$$

Mais

$$y_1 = mx_1 + n \quad \text{et} \quad y_2 = mx_2 + n;$$

d'où

$$y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2) \quad \text{et} \quad x_2y_1 - x_1y_2 = -n(x_1 - x_2),$$

et par suite

$$\alpha = \frac{-c^2m}{a^2n}\cdot x_1x_2 \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{c^2}{b^2n}\cdot y_1y_2,$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{a^2}{b^2m}\cdot\frac{y_1y_2}{x_1x_2}.$$

D'autre part, la résolution des équations (1) et (2)

conduit à

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0,$$
$$(a^2m^2+b^2)y^2-2b^2ny+b^2(n^2-a^2m^2)=0;$$

il en résulte

$$x_1x_2=\frac{a^2(n^2-b^2)}{a^2m^2+b^2},\quad y_1y_2=\frac{b^2(n^2-a^2m^2)}{a^2m^2+b^2}$$

et

$$\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{b^2(n^2-a^2m^2)}{a^2(n^2-b^2)}.$$

Le coefficient angulaire de OR est donc

$$\frac{6}{\alpha}=\frac{n^2-a^2m^2}{m(n^2-b^2)}.$$

En exprimant que ce coefficient est égal à $-m$, on a

$$\frac{n^2-a^2m^2}{m(n^2-b^2)}=-m,$$

d'où

(3) $$(m^2+1)n^2=(a^2+b^2)m^2.$$

Or la droite PQ coupe les axes en des points dont les distances au centre O de l'ellipse ont, respectivement, pour valeurs $-\frac{n}{m}$ et n; il s'ensuit que la partie de PQ comprise entre les axes est égale à

$$\sqrt{\frac{n^2}{m^2}+n^2}=\frac{n}{m}\sqrt{1+m^2}.$$

Mais, d'après l'équation (3),

$$\frac{n}{m}\sqrt{1+m^2}=\sqrt{a^2+b^2}:$$

donc la partie de PQ comprise entre les axes est de longueur constante $\sqrt{a^2+b^2}$.

2° Formons l'équation du quatrième degré qui donne

les coefficients angulaires des quatre normales à l'ellipse, issues du point R $(\alpha, 6)$. Il faut, à cet effet, éliminer x et y entre les équations

$$\mu = \frac{y-6}{x-\alpha};$$
$$a^2\alpha y - b^2 6 x = c^2 xy,$$
$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

μ représentant le coefficient angulaire de la normale.

Le calcul conduit à l'équation

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l} b^2\alpha^2.\mu^4 - 2b^2\alpha 6\mu^3 \\ \quad + (b^2 6^2 + a^2\alpha^2 - c^4)\mu^2 - 2a^2\alpha 6\mu + a^2 6^2 = 0. \end{array} \right.$$

Si μ_1 et μ_2 sont les coefficients angulaires des normales PR, QR, et μ_3 et μ_4 les coefficients angulaires des deux autres normales, on a, d'après l'équation (4),

$$(5)\qquad \mu_1.\mu_2.\mu_3.\mu_4 = \frac{a^2 6^2}{b^2\alpha^2} = \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{6}{\alpha}\right)^2;$$

or

$$\left(\frac{6}{\alpha}\right) = -m,$$

par conséquent

$$(6)\qquad \mu_1.\mu_2.\mu_3.\mu_4 = \frac{a^2m^2}{b^2}.$$

Mais

$$\mu_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1},\quad \mu_2 = \frac{a^2y_2}{b^2x_2};$$

donc

$$\mu_1.\mu_2 = \frac{a^4y_1y_2}{b^4x_1x_2} = \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{n^2-a^2m^2}{n^2-b^2}\right) = \frac{-a^2m^2}{b^2}.$$

En tenant compte de cette valeur de $\mu_1\mu_2$, la relation (6) donne

$$\mu_3.\mu_4 = -1,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Note. — M. Launoy, professeur au lycée du Puy, et M. Juhel-Renoy, ont résolu la même question.

Question 1516

(voir 3e série, t. III, p. 544);

PAR MM. G. DROUOT ET H. BAGARD,
Élèves du lycée de Bar-le-Duc (Mathématiques spéciales).

On mène la normale en un point P *d'une ellipse donnée; cette normale coupe les axes aux points* Q, R; *sur* QR *comme diamètre on décrit un cercle; par un point quelconque,* S, *de la tangente à l'ellipse au point* P, *on mène des tangentes à ce cercle : démontrer que la corde de l'ellipse qui passe par les points de contact sous-tend un angle droit, au point* (P) [1].

(WOLSTENHOLME.)

On sait que les polaires des divers points de la droite PS, par rapport au cercle considéré, passent par un point fixe A, pôle de PS, situé sur la normale en P à l'ellipse, et qui contient le centre du cercle.

Or, d'après le théorème de *Frégier,* la corde interceptée sur l'ellipse par les côtés d'un angle droit ayant son sommet P sur la courbe, passe par un point fixe de normale. Et inversement, toute corde de l'ellipse qui passe par ce point fixe sous-tend un angle droit au point P.

Donc, si nous démontrons que la corde correspondant dans l'ellipse à la polaire d'un point particulier S de PS sous-tend un angle droit au point P, la question sera résolue [2].

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

(2) Parce qu'il sera ainsi démontré que le pôle A est le point où la normale est rencontrée par les cordes de l'ellipse qui sous-tendent des angles droits en P.

Considérons le point S pour lequel la polaire relative au cercle est un diamètre HL de l'ellipse.

Soient C le centre du cercle décrit sur QR comme diamètre, et O le centre de l'ellipse.

On a

$$(1) \qquad CA.CP = \overline{CQ}^2 = \overline{CO}^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{CA}{CO} = \frac{CO}{CP};$$

il s'ensuit que les triangles CAO, COP sont semblables; leur similitude donne

$$\frac{OA}{OP} = \frac{CA}{CO} = \frac{CA}{CQ}.$$

D'autre part, on a, d'après la relation (1),

$$\frac{CA}{CQ} = \frac{CQ}{CP} = \frac{CQ-CA}{CP-CQ} = \frac{AQ}{QP}: \quad \text{donc} \quad \frac{OA}{OP} = \frac{AQ}{QP},$$

ce qui montre que la droite OQ est bissectrice de l'angle AOP; par conséquent OP = OL (¹).

Or, OP est la médiane du triangle HPL; donc ce triangle est rectangle en P, et la proposition est démontrée.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Launoy, professeur au lycée du Puy, Juhel-Renoy et Barisien.

Question 1524

(voir 3ᵉ série, t. IV, p. 164);

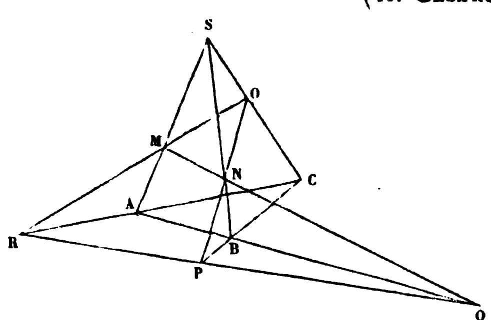
PAR M. L'ABBÉ A. GENEIX-MARTIN.

1° *Les points où les arêtes d'une des faces d'un tétraèdre sont rencontrées par les plans bissecteurs extérieurs des dièdres opposés sont en ligne droite;*

(¹) C'est une égalité que l'on peut effectivement conclure de ce que les demi-diamètres OP, OL de l'ellipse forment des angles égaux avec l'un des deux axes de la courbe.

2° *Cette droite est dans le plan déterminé par les points où les trois autres arêtes sont rencontrées par les plans bissecteurs intérieurs des dièdres opposés.*

(F. Cesaro.)



1° Soient R, P, Q les points où les arêtes de la face ABC sont rencontrées par les plans bissecteurs extérieurs des dièdres opposés.

Le *plan bissecteur d'un angle dièdre d'un tétraèdre divise l'arête opposée en deux segments proportionnels aux faces adjacentes.* Le théorème est vrai aussi pour le plan bissecteur d'un angle extérieur au tétraèdre. (*Voir* solutions des problèmes d'Amiot, édition 1873, p. 250.)

D'après ce théorème, on a

$$\frac{PB}{PC}=\frac{ASB}{ASC},\quad \frac{RC}{RA}=\frac{BSC}{ASB},\quad \frac{QA}{QB}=\frac{ASC}{BSC};$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{PB.RC.QA}{PC.RA.QB}=\frac{ASB.BSC.ASC}{ASC.ASB.BSC}=1.$$

Donc, d'après le théorème de Ménélaüs, les trois points R, P, Q sont en ligne droite.

2° Soient M, N, O les points où les arêtes SA, SB, SC

sont rencontrées par les plans bissecteurs intérieurs des dièdres opposés. On a

$$\frac{RC}{RA} = \frac{BSC}{ASB}, \quad \frac{MA}{MS} = \frac{ABC}{BSC}, \quad \frac{OS}{OC} = \frac{ASB}{ABC},$$

d'où

$$\frac{RC.MA.OS}{RA.MS.OC} = \frac{BSC.ABC.ASB}{ASB.BSC.ABC} = 1;$$

donc les trois points O, M, R sont en ligne droite. On prouverait de même que P est sur le prolongement de ON, et Q sur le prolongement de MN. Donc la droite RPQ est dans le plan MNO. Ce qu'il fallait démontrer.

Note. — La même question a été résolue par M. Valeri, professeur au lycée royal de Modène.

Question 1533

(voir 3e série, t. IV, p. 391);

PAR M. J. ROMERO, à Aranda de Duero.

n étant un nombre entier positif,

$$3^{2n+3} + 40n - 27$$

est divisible par 64.

(WOLSTENHOLME.)

On peut énoncer la proposition sous la forme suivante, plus générale :

n et p étant deux nombres entiers positifs

$$a^{2(n+p)+1} + (a^2 - 1)(a^2 - a - 1)n - a^{2p+1},$$

est divisible par $(a^2 - 1)^2$.

En effet, si l'on attribue à n les deux valeurs entières et positives m et $m+1$, on aura, par soustraction, la

congruence

(1) $a(a^2-1)[a^{2(m+p)}-1]+(a^2-1)^2 \equiv 0, \quad [\text{mod.}(a^2-1)^2].$

D'autre part, pour $n=1$, on a

(2) $a(a^2-1)(a^{2p}-1)+(a^2-1)^2 \equiv 0, \quad [\text{mod.}(a^2-1)^2];$

par conséquent, la propriété énoncée aura lieu pour toutes les valeurs entières positives de n (¹).

Note. — MM. Moret-Blanc, Juhel-Renoy et Fauquembergue ont résolu la même question.

M. Juhel-Renoy a démontré cette proposition plus générale : l'expression

$$(a+1)^{2(n+p)}-(a^2+2a)n-(a+1)^{2p},$$

dans laquelle a, n, p sont des nombres entiers positifs, est divisible par $(a^2+2a)^2$.

M. Fauquembergue a, de même, généralisé la proposition de M. Wolstenholme, en démontrant le théorème suivant :

m désignant $a^\alpha-1$, l'expression

$$a^{\alpha n+\alpha}+(km-a^\alpha)mn-a^\alpha$$

est divisible par m^2.

a, α, n, k, m représentent des nombres entiers positifs.

Question 1536

(voir 3ᵉ série, t. IV, p. 391);

PAR M. GIOVANI RUSSO, à Cantazaro.

Dans la parabole, les segments déterminés sur deux tangentes issues d'un même point de l'axe par deux tangentes quelconques sont égaux. (D'OCAGNE.)

Soient AB, AC les tangentes issues d'un point A de

(¹) On peut conclure de la congruence (1) que, si la propriété énoncée existe pour une certaine valeur m de n, elle aura lieu encore pour la valeur $m+1$ de n et la congruence (2) montre que cette propriété existe pour $n=1$; donc elle a lieu pour toute valeur entière positive de n. (G.)

l'axe de la parabole considérée (¹); DE, FG deux autres tangentes rencontrant respectivement AB aux points D, F, et AC aux points E, G, de sorte que les segments déterminés sur AB, AC sont DF, EG.

On sait que, dans la parabole, la projection de la partie d'une tangente variable, comprise entre deux tangentes fixes, sur une droite perpendiculaire à l'axe, est constante (²); donc, en désignant par HM et NL les projections des tangentes DE, FG sur la droite BC qui est perpendiculaire à l'axe, on a

$$\mathrm{HM} = \mathrm{NL},$$

et, supprimant la partie LM, commune à ces deux projections, il vient

$$\mathrm{HL} = \mathrm{MN},$$

c'est-à-dire que les projections des segments DF, EG sont égales entre elles. En outre, les deux droites DF, EG sont également inclinées sur BC; par conséquent, on peut conclure l'égalité des segments DF, EG de l'égalité de leurs projections HL, MN. C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1538

(voir 3ᵉ série, t. IV, p. 391);

PAR UN ANONYME.

L'aire du triangle formé par les centres des trois cercles exinscrits à un triangle est égale au produit

---

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

(²) Cette projection est précisément la moitié de la projection de la corde des contacts des tangentes fixes sur une perpendiculaire à l'axe. Cela résulte simplement de ce que le diamètre mené par le point de rencontre de deux tangentes divise en parties égales la corde des contacts. (G.)

du périmètre de ce triangle par le rayon du cercle circonscrit. (BARISIEN.)

Soient M, N, P les points où les bissectrices AO, BO, CO des angles d'un triangle ABC rencontrent la circonférence circonscrite à ce triangle (¹), et O', O'', O''' les centres des trois cercles exinscrits, respectivement tangents aux côtés BC, CA, AB ou a, b, c; je vais d'abord démontrer que les points M, N, P sont les milieux des droites OO', OO'', OO'''.

Dans le triangle OBM, chacun des deux angles BOM, OBM est égal à $\frac{A+B}{2}$; donc MB = MO; mais, le triangle OBO' étant rectangle en B, MO' = MB; donc MO' = MO, et par conséquent le point M est le milieu de OO'. On démontrerait de même que les points N, P sont les milieux des droites OO'', OO'''.

Cela étant, les égalités

$$OM = \tfrac{1}{2}OO', \quad ON = \tfrac{1}{2}OO'', \quad OP = \tfrac{1}{2}OO'''$$

donnent

$$MN = \tfrac{1}{2}O'O'', \quad MP = \tfrac{1}{2}O'O''', \quad PN = \tfrac{1}{2}O''O'''$$

et, par suite,

$$\text{surf.}\, O'O''O''' = 4\, MNP.$$

Reste à faire voir que, en désignant par R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC et par $2p$ le périmètre de ce triangle, on a

$$\text{surf.}\, MNP = \tfrac{1}{2}p.R.$$

Soit C' le centre du cercle circonscrit au triangle. Les rayons C'M, C'N étant respectivement perpendiculaires aux milieux des cordes BC, CA, l'angle MC'N est le

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

supplément de l'angle C; il en résulte

$$\text{surf. } C'MN = \tfrac{1}{2}R^2 \sin C = \tfrac{1}{2}R \sin C \times R = \tfrac{1}{4}aR.$$

On aura de même

$$C'MP = \tfrac{1}{4}bR, \quad C'NP = \tfrac{1}{4}aR;$$

donc

$$C'MN + C'MP + C'NP, \quad \text{ou} \quad MNP = \frac{p}{2}R.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Juhel-Renoy; A. Bussani, professeur au lycée de Padoue.

QUESTIONS.

1546. Par le foyer d'une parabole on mène trois rayons vecteurs faisant entre eux des angles égaux, et en leurs milieux on élève des perpendiculaires qui, en se rencontrant, forment un triangle équilatéral.

Démontrer que le lieu du centre et l'enveloppe du cercle circonscrit à ce triangle sont des cercles.

(E. Fauquembergue.)

1547. Soient AA', BB' deux diamètres conjugués d'une ellipse; MM' un diamètre quelconque : les pôles des quatre droites MA, MA', M'B, M'B' sont situés sur une hyperbole qui passe par le centre de l'ellipse, et est tangente, en ce point, au diamètre MM'; le centre de cette courbe est situé sur l'ellipse, et ses asymptotes sont parallèles aux droites AA', BB', respectivement.

(Genty.)

1548. Prouver que

$$\frac{(C_{2n-2p,\,n-p} \times C_{2p,\,p})^2}{C_{n,\,p}} = \text{entier}.$$

(Catalan.)

1549. Une ellipse de grandeur invariable (demi-axes a, b) se déplace de façon à rester tangente à une droite donnée en un point donné; démontrer que le lieu géométrique du centre de cette ellipse est une courbe fermée du quatrième degré, dont l'aire a pour expression

$$\frac{\pi}{2}(a-b)^2.$$

(E. Barisien.)

1550. Étant donnés un cercle fixe et une droite tournant autour d'un point fixe, on considère un cercle de rayon constant tangent au cercle et à la droite; on demande le lieu du point de contact de ce cercle et de la droite. (D'Ocagne.)

1551. Trouver une courbe plane, telle que le produit des distances d'un point fixe à deux de ses tangentes parallèles soit constant.

Les coniques à centre sont des cas particuliers.

(Barbarin.)

1552. On donne une asymptote d'une hyperbole équilatère, un point de la courbe et une circonférence tangente à l'hyperbole; déterminer ses axes et ses foyers.

(A....)

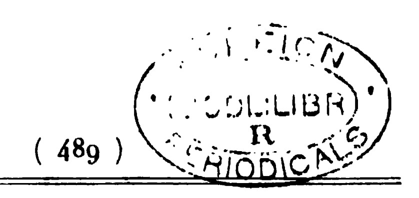
1553. Soient A, B, a, b, c des nombres entiers positifs, et $100a + 10b + c$ divisible par $10A + B$: démontrer que $cA^2 - bAB + aB^2$ est, de même, divisible.

(Cap. P.-A. Macmahon, R. A.)

Extrait du journal anglais : *The educational Times*.

ERRATUM.

Même tome, page 440, ligne 10, *au lieu de* question 1543, *lisez* question 1545.



PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES FAISCEAUX EN INVOLUTION, ET LEUR APPLICATION A QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS AUX COURBES DU SECOND ET DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. J.-B. POMEY.

Soient $y = x \tang \alpha$, $y = x \tang \alpha'$ les équations de deux droites passant par l'origine des coordonnées, les axes étant supposés rectangulaires.

Si, entre α et α', il existe la relation

$$(1) \qquad A \tang \alpha \tang \alpha' + B(\tang \alpha + \tang \alpha') + C = 0,$$

où A, B, C sont des constantes, ces deux droites sont dites rayons correspondants d'une involution.

L'angle α deviendra égal à l'angle α', et le couple de rayons correspondants sera dit se réduire à un rayon double, pour les valeurs de $\tang \alpha$ racines de l'équation

$$(2) \qquad A x^2 + 2 B x + C = 0.$$

Si les deux valeurs de $\tang \alpha$ ainsi obtenues sont imaginaires, elles sont conjuguées si A, B, C sont réels. Soient α_1 et α_2 les angles dont les tangentes sont les racines x', x'' de (2). Si l'angle $\alpha_1 + \alpha_2$ est réel, il en sera de même de l'angle $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$, et cela a lieu en réalité, car la formule

$$\tang(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\tang \alpha_1 + \tang \alpha_2}{1 - \tang \alpha_1 \tang \alpha_2}$$

ne contient que la somme et le produit de deux quantités imaginaires conjuguées.

Si, dès lors, on prend pour axe des x la direction définie par l'une des valeurs de $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$, l'autre étant

$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\frac{\pi}{2}$, l'équation (1) se changera, comme on le voit aisément, en une relation de la forme

$$A \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' + C = 0.$$

En effet, la nouvelle relation entre $\operatorname{tang}\alpha$ et $\operatorname{tang}\alpha'$ doit encore être du premier degré par rapport à chacune de ces quantités; car si, auparavant, à un rayon $y = x \operatorname{tang}\alpha$ n'en correspondait qu'un seul $y = x \operatorname{tang}\alpha'$, ce n'est pas un changement d'axes qui peut lui en faire correspondre plusieurs. La relation ne doit pas non plus perdre sa symétrie. De plus, la nouvelle équation (2) doit manquer du second terme; car, si l'axe des x est la bissectrice des rayons doubles, les valeurs de x (x' et x''), réelles ou imaginaires, doivent, en tous cas, être égales et de signes contraires.

Soit maintenant $\varphi_2 + \varphi_1 t = 0$ l'équation d'une conique, mise sous forme d'une somme de termes homogènes en x et y, φ_2 du second degré et φ_1 du premier degré, t étant une variable introduite pour l'homogénéité, cette conique passant par l'origine.

Soit alors $mx + ny = t$ l'équation d'une droite. L'équation $\varphi_2 + \varphi_1(mx+ny) = 0$ est l'équation des deux rayons joignant l'origine aux points d'intersection de la droite et de la conique. Soit

$$y = x \operatorname{tang}\alpha, \quad y = x \operatorname{tang}\alpha'$$

ce couple de rayons. On a

$$\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\alpha' = \frac{Am + Bn + C}{A'm + B'n + C'},$$

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = \frac{A_1 m + B_1 n + C_1}{A'm + B'n + C'},$$

A, B, C, A', B', C', A_1, B_1, C_1 étant des constantes; et

si la droite passe par un point fixe, on aura

$$A_2 m + B_2 n + C_2 = 0,$$

A_2, B_2, C_2 étant des constantes.

Éliminons m et n entre ces trois équations, il vient

$$\begin{vmatrix} A' \tang\alpha \tang\alpha' - A & B' \tang\alpha \tang\alpha' - B & C' \tang\alpha \tang\alpha' - C \\ A'(\tang\alpha + \tang\alpha') - A_1 & B'(\tang\alpha + \tang\alpha') - B_1 & C'(\tang\alpha + \tang\alpha') - C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\Sigma A_2 \begin{vmatrix} B' \tang\alpha \tang\alpha' - B & C' \tang\alpha \tang\alpha' - C \\ B'(\tang\alpha + \tang\alpha') - B_1 & C'(\tang\alpha + \tang\alpha') - C_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin

$$\Sigma \left\{ A_2 \tang\alpha \tang\alpha'(\tang\alpha + \tang\alpha') \begin{vmatrix} B' & C' \\ B' & C' \end{vmatrix} + A_2 \begin{vmatrix} -B & C' \tang\alpha \tang\alpha' \\ -B_1 & C'(\tang\alpha + \tang\alpha') \end{vmatrix} + A_2 \begin{vmatrix} B' \tang\alpha \tang\alpha' & -C \\ B'(\tang\alpha + \tang\alpha') & -C_1 \end{vmatrix} + A_2 \begin{vmatrix} -B & -C \\ -B_1 & -C_1 \end{vmatrix} \right\} = 0.$$

Le premier déterminant $\begin{vmatrix} B' & C' \\ B' & C' \end{vmatrix}$ étant nul, cette relation est de la forme (1), et le couple de rayons fait partie d'une involution. En faisant tourner les axes, la relation (1) peut être ramenée à la forme

$$\tang\alpha \tang\alpha' = \text{const.}$$

Il y a lieu de remarquer que, pour $\alpha = 0$, on a $\alpha' = 90°$, et que les nouveaux axes sont un couple de rayons correspondants rectangulaires. Cela prouve, en passant, que le couple, ordinairement unique, de rayons correspondants rectangulaires est formé par le système des bissectrices des rayons doubles réels ou imaginaires. Si nous supposons que, en dehors de ce couple, il y en

ait un autre qui soit rectangulaire, on aura

$$\tang \alpha \tang \alpha' = -1,$$

et la constante devenant égale à -1, tous les couples sont rectangulaires. Mais parmi ces couples rectangulaires se trouve celui qui est formé par la tangente et la normale à la conique. Or cette remarque prouve que le point fixe par où passe la droite $mx + ny = t$ est sur la normale.

Réciproquement, si les deux droites représentées par $\varphi_2 + \varphi_1 (mx + ny) = 0$ sont rectangulaires, en remarquant que les coefficients de x^2 et de y^2 sont du premier degré en m et n, on a une condition de la forme

$$\frac{Am + Bn + C}{A'm + B'n + C'} = -1,$$

relation qui, étant du premier degré en m et n, prouve que $mx + ny = t$ passe par un point fixe, lequel est évidemment sur la normale (théorème de Frégier).

Considérons maintenant une courbe du troisième degré à point double. Mettons l'origine au point double, et soit $\varphi_3 + \varphi_2 t = 0$ l'équation de cette courbe mise sous forme d'une somme de termes homogènes en x et y, φ_3 étant du troisième degré, φ_2 du second, et t étant une variable introduite pour l'homogénéité. Si $mx + ny = t$ est une droite quelconque, l'équation

$$\varphi_3 + \varphi_2 (mx + ny) = 0$$

est celle des rayons vecteurs menés du point double aux points d'intersection de la droite considérée avec la courbe. Si α, α', α'' sont leurs angles avec l'axe des x et qu'on pose

$$S_1 = \tang \alpha + \tang \alpha' + \tang \alpha'',$$

$$S_2 = \tang \alpha \tang \alpha' + \tang \alpha' \tang \alpha'' + \tang \alpha'' \tang \alpha,$$

$$S_3 = \tang \alpha \tang \alpha' \tang \alpha'',$$

on aura

$$S_1 = \frac{Am + Bn + C}{A'm + B'n + C'},$$

$$S_2 = \frac{A_1 m + B_1 n + C_1}{A'm + B'n + C'},$$

$$S_3 = \frac{A_2 m + B_2 n + C_2}{A'm + B'n + C'},$$

$A, B, C, A', B', C', A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ étant des constantes qui dépendent de l'équation de la courbe; d'où

$$\begin{vmatrix} A'S_1 - A & A'S_2 - A_1 & A'S_3 - A_2 \\ B'S_1 - B & B'S_2 - B_1 & B'S_3 - B_2 \\ C'S_1 - C & C'S_2 - C_1 & C'S_3 - C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre se décompose en une somme de déterminants partiels. Le premier

$$\begin{vmatrix} A'S_1 & A'S_2 & A'S_3 \\ B'S_1 & B'S_2 & B'S_3 \\ C'S_1 & C'S_2 & C'S_3 \end{vmatrix}$$

est nul, comme ayant les éléments de ses trois colonnes proportionnels. Les déterminants qui contiennent, dans deux colonnes, respectivement S_1 et S_2 ou S_2 et S_3 ou S_3 et S_1 sont nuls, comme ayant les éléments de deux colonnes proportionnels. Il reste donc une relation de la forme

$$MS_1 + NS_2 + PS_3 + Q = 0,$$

où M, N, P, Q sont des constantes. Si je suppose α'' constant, un des points d'intersection de $mx + ny = t$ ne varie pas, et la relation entre α et α' est une relation d'involution. De plus, on conclut de là que, si, par un point d'une courbe du troisième degré à point double, on peut faire passer deux cordes qui, limitées à leurs deux autres points d'intersection avec la courbe du troisième degré, soient vues du point double sous un angle

droit chacune respectivement, il en est de même de toute autre corde. J'ajouterai que ce point existe et qu'il est unique. En effet, la relation d'involution peut prendre la forme A $\tang \alpha \tang \alpha'$ + C = o. Or, comme dans cette relation $\tang \alpha''$ n'entre qu'au premier degré, la condition A + C = o est du premier degré en $\tang \alpha''$. Il n'y a donc qu'une direction α'', et à cette direction ne correspond qu'un point sur la courbe du troisième degré, puisqu'il est évident qu'on doit faire abstraction du point double lui-même.

Supposons maintenant que l'origine ne soit pas au point double et soit pourtant sur la courbe. On aura pour équation

$$\varphi_3 + \varphi_2 t + \varphi_1 t^2 = 0,$$

φ_3, φ_2, φ_1 étant homogènes en x et y et respectivement des degrés 3, 2, 1. Si je suppose que t y représente le binôme $mx + ny$, cette équation représentera l'ensemble des rayons vecteurs d'intersection de $mx + ny = t$ avec la courbe du troisième degré. Si, entre les inclinaisons de ces rayons vecteurs, il y a la relation

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = \pi,$$

on aura

$$\tang \alpha + \tang \alpha' + \tang \alpha'' = \tang \alpha \tang \alpha' \tang \alpha'',$$

relation linéaire par rapport aux coefficients de l'équation cubique des rayons vecteurs et, par suite, du second degré en m et n. Il en résulte que la droite $mx + ny = t$ enveloppe une conique.

Si, par un point M d'une conique, on fait pivoter un angle droit, la corde d'intersection des côtés de cet angle et de la conique pivote elle-même autour d'un point N de la normale. Si O est le centre de la conique, la droite ON est l'une de ces cordes. C'est un diamètre AB de la conique, tel que, si l'on construit sur lui comme dia-

mètre un cercle, ce cercle passera par le point M, et les droites AB et MO sont un couple de sécantes communes au cercle et à la conique. Il en résulte que ces droites, c'est-à-dire OM et ON, sont également inclinées sur les axes.

Si X, Y et x, y sont les coordonnées de N et M par rapport aux axes de la conique, en supposant que celle-ci est une ellipse, on aura

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

et

$$\frac{X - x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{Y - y}{\frac{y}{b^2}}$$

avec

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{-y},$$

car le point N est l'intersection de la normale en M et de la symétrique de OM par rapport aux axes. Soit t la valeur commune de $\frac{X}{x}$ et de $\frac{Y}{-y}$. En vertu de

$$a^2\frac{X}{x} - b^2\frac{Y}{y} = c^2,$$

on aura l'équation

$$(a^2 + b^2)t = a^2 - b^2$$

avec

$$\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}\right)\frac{1}{t^2} = 1;$$

d'où

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2.$$

On en conclut que, lorsque le point M parcourt la conique, le point N parcourt une conique homothétique et concentrique.

L'équation de cette conique, lieu du point N, donne très aisément comme conséquence les rayons de cour-

bure situés sur les axes. En effet, soit P le point où MN coupe OX, on a

$$\frac{ON}{OM} = \frac{PN}{PM}.$$

En supposant que O, P, M, N viennent en ligne droite, cette relation devient, en désignant par ρ le rayon de courbure,

$$\frac{a\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{a} = \frac{a-\rho-a\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{a-(a-\rho)};$$

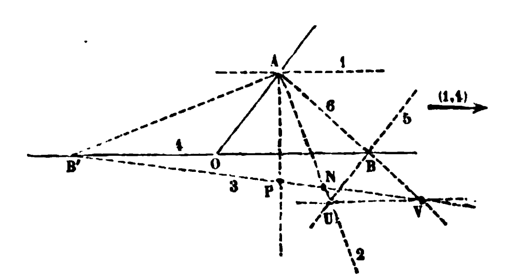
d'où l'on tire aisément

$$\rho = \frac{b^2}{a}.$$

Ce calcul peut plutôt être considéré comme une vérification.

Ce théorème permet encore de construire les axes d'une conique, d'une ellipse par exemple, donnée par deux diamètres conjugués OA, OB.

En effet, soient OB' la droite égale et opposée à OB, B'AN un angle droit, N le point où la droite AN coupe



la conique donnée, et P le point où la corde B'N coupe la normale en A. Les axes OX, OY sont les bissectrices de l'angle AOP. Pour avoir le point N, il suffit de se servir d'un hexagone de Pascal, par exemple celui dont les côtés sont : la tangente en A (côté n° 1), la droite AN

elle-même (n° 2), la corde cherchée B'N (n° 3), le diamètre B'B (n° 4), la tangente en B (n° 5), et la corde BA (n° 6).

Le point d'intersection de 1 et 4 est à l'infini sur BB', de 2 et 5 est en U, de 3 et 6 est en V, UV étant parallèle à BB', et enfin B'V est la corde cherchée.

Remarque. — Les théorèmes précédents donnent un moyen facile de déterminer l'équation des axes de la conique, dont l'équation est, par rapport à des axes formant un angle θ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En effet, si, par un point fixe d'une conique, je mène les deux cordes qui aboutissent aux extrémités d'un diamètre quelconque, ces cordes sont les rayons correspondants d'une involution. Mais, si une droite a pour équation $y = ax$, l'angle ω de cette droite avec l'axe des x est donné par la relation

$$a = \frac{\sin\omega}{\sin(\theta - \omega)};$$

d'où

$$\cot\omega = \cot\theta + \frac{1}{a\sin\theta};$$

de sorte que, si α est l'angle que fait avec ox la bissectrice de $y = ax$ et de $y = a'x$, on aura

$$\tang 2\alpha = \frac{2\cot\theta + \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right)}{\cot^2\theta + \frac{\cot\theta}{\sin\theta}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) + \frac{1}{aa'\sin^2\theta} - 1},$$

d'après la formule

$$\tang(\omega + \omega') = \frac{\cot\omega + \cot\omega'}{\cot\omega\cot\omega' - 1}.$$

Or cherchons, dans l'involution précédente, le couple

de rayons rectangulaires. Il est obtenu pour les bissectrices des rayons doubles; mais le rayon double est obtenu lorsque le diamètre est devenu tangent à la conique. Or les tangentes à une conique menées par son centre sont ses asymptotes. Leur équation est

$$\frac{y^2}{x^2} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

La somme des deux racines en $\frac{y}{x}$ est nulle, leur produit égal à $\frac{b^2}{a^2}$.

Dans la formule écrite plus haut, α désignera donc l'angle d'un des rayons rectangulaires avec ox, si l'on remplace $\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$ par zéro et $\frac{1}{aa'}$ par $\frac{a^2}{b^2}$. On a ainsi

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{b^2 \sin 2\theta}{a^2 + b^2 \cos 2\theta};$$

mais les directions de ces rayons rectangulaires sont celles des axes; car oX, parallèle à l'un d'eux MA, coupe l'autre MB en son milieu et lui est perpendiculaire. oX est donc le diamètre conjugué des cordes MB et est perpendiculaire à cette direction de cordes. oX est donc un axe. De même MB est parallèle à l'autre axe.

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1885;

SOLUTION ANALYTIQUE

PAR M. JUHEL-RÉNOY.

Par les deux foyers d'une ellipse fixe, on fait passer une circonférence variable :

1° *A quelle condition doit satisfaire cette ellipse*

pour que la circonférence puisse réellement la rencontrer en quatre points, et dans quelle portion du petit axe doit-on placer le centre du cercle pour qu'il y ait effectivement quatre points réels d'intersection?

2° *En chacun des points d'intersection, on mène la tangente à l'ellipse; ces quatre droites forment un quadrilatère; quel est le lieu des sommets de ce quadrilatère quand le cercle varie?*

3° *Quel est le lieu de l'intersection des côtés de ce quadrilatère avec ceux d'un autre quadrilatère symétrique du premier par rapport au centre de l'ellipse?*

4° *On considère les tangentes communes au cercle et à l'ellipse. Trouver le lieu de leurs points de contact avec le cercle.*

1° Soient

$$a^2Y^2 + b^2X^2 - a^2b^2 = 0,$$
$$X^2 + Y^2 - 2\alpha Y - c^2 = 0$$

les équations de l'ellipse et du cercle, α étant un paramètre variable. L'équation des cordes d'intersection sera

$$(1) \qquad c^2Y^2 + 2b^2\alpha Y - b^4 = 0.$$

Écrivons que les quatre points d'intersection sont réels, c'est-à-dire que cette équation a ses racines comprises entre b et $-b$, nous aurons les conditions

$$c^2 - b^2 > 2b\alpha > -(c^2 - b^2);$$

la condition relative à l'ellipse est donc $c > b$. Cette condition étant supposée remplie, l'ordonnée du centre du cercle pourra varier entre $\frac{c^2 - b^2}{2b}$ et $-\frac{c^2 - b^2}{2b}$.

2° Soient A, B, C, D les côtés du premier quadrilatère. Les côtés A et B, C et D se coupent sur le petit axe, qui forme ainsi une partie du lieu. Soit β l'ordonnée du point d'intersection des côtés A et B. L'équation de

ces côtés sera

$$(2) \qquad (\beta^2 - b^2)(a^2Y^2 + b^2X^2 - a^2b^2) = a^2(\beta Y - b^2)^2.$$

La corde des contacts avec l'ellipse sera donnée par l'une des racines de l'équation

$$c^2Y^2 + 2b^2\alpha Y - b^4 = 0.$$

L'équation qui donne les pôles de ces droites s'obtient en changeant Y en $\frac{b^2}{Y}$: elle est donc

$$c^2 + 2\alpha Y - Y^2 = 0.$$

Mais β doit être racine de cette équation, par conséquent

$$(3) \qquad \beta^2 - 2\alpha\beta - c^2 = 0.$$

Or, supposons que, dans l'équation (2), X, Y soient les coordonnées du point d'intersection, soit de A et D, ou A et C, soit de B et D, ou B et C. L'équation (2) donnera les ordonnées des points où ces côtés coupent le petit axe. Elle sera donc identique à l'équation (3). Écrivons donc que le produit des racines de l'équation (2) en β est égal à $-c^2$. Nous aurons le lieu représenté par l'équation

$$a^2Y^2 + b^2X^2 = c^2(X^2 - a^2)$$

ou

$$a^2Y^2 - (c^2 - b^2)X^2 = -a^2c^2,$$

équation d'une hyperbole rapportée aux mêmes axes de coordonnées que l'ellipse, et dont l'axe transverse est dirigé suivant le grand axe de l'ellipse.

3° Soient A', B', C', D' les symétriques des côtés A, B, C, D par rapport au centre de l'ellipse. Les côtés A et A' sont parallèles, A et B' se coupent sur le grand axe qui constitue une partie du lieu. Supposons que X, Y, dans l'équation (2), soient les coordonnées du point de rencontre de A et C', par exemple. L'équation (2) en β

devra alors avoir les mêmes racines en valeur absolue que dans le second cas, l'une d'elles aura simplement changé de signe. Écrivons donc que le produit des racines est égal à c^2, et nous aurons le lieu représenté par

$$a^2Y^2 + b^2X^2 = -c^2(X^2 - a^2)$$

ou

$$X^2 + Y^2 = c^2,$$

équation du cercle décrit du centre de l'ellipse avec la distance focale, c, comme rayon.

4° Soit β l'ordonnée du point d'intersection du petit axe avec une tangente commune à l'ellipse et au cercle. Les équations des tangentes menées au cercle et à l'ellipse, de ce point, sont respectivement

$$(\beta^2 - 2\alpha\beta - c^2)(X^2 + Y^2 - 2\alpha Y - c^2) = (\beta Y - \alpha\beta - \alpha Y - c^2)^2,$$
$$(\beta^2 - b^2)(a^2Y^2 + b^2X^2 - a^2b^2) = a^2(\beta Y - b^2)^2.$$

Identifions les rapports des coefficients de X^2 et de Y^2 de ces deux équations; nous aurons

$$\frac{\beta^2 - b^2}{\beta^2 - 2\alpha\beta - c^2} = \frac{a^2}{c^2 + \alpha^2}$$

ou

$$(\alpha^2 - b^2)\beta^2 + 2a^2\alpha\beta + c^4 - b^2\alpha^2 = 0.$$

En supposant la quantité $\alpha^2 - b^2$ différente de zéro, cette équation donne

$$(\alpha^2 - b^2)\beta = -a^2\alpha \pm b(\alpha^2 + c^2).$$

Le point de contact avec le cercle est situé sur la polaire, par rapport au cercle, du point dont les coordonnées sont $x = 0$, $y = \beta$: l'équation de cette polaire est

$$\beta Y - \alpha\beta - \alpha Y - c^2 = 0.$$

Donc

$$\beta = \frac{\alpha Y + c^2}{Y - \alpha}$$

et, par suite,

$$(\alpha^2 - b^2)(\alpha Y + c^2) = -(Y - \alpha)a^2\alpha \pm b(\alpha^2 + c^2)(Y - \alpha).$$

Cette équation peut s'écrire

$$[(\alpha^2 - b^2)\alpha + a^2\alpha \mp b(\alpha^2 + c^2)]Y + c^2(\alpha^2 - b^2) - a^2\alpha^2 \pm b\alpha(\alpha^2 + c^2) = 0$$

ou

$$(\alpha^2 + c^2)(\alpha \mp b)(Y \mp b) = 0;$$

d'où

$$Y = \pm b.$$

On voit facilement que, en supposant $\alpha^2 = b^2$, on obtient des points du lieu situés, de même, sur les droites $Y^2 = b^2$. En effet, on a alors

$$\beta(Y \mp b) = \pm bY + c^2,$$

et

$$\pm 2a^2 b\beta + c^4 - b^4 = 0$$

ou

$$\pm 2b\beta = b^2 - c^2.$$

En éliminant β entre ces deux équations, on trouve

$$Y = \pm b.$$

Le lieu se compose donc des deux droites $Y^2 = b^2$, c'est-à-dire des tangentes à l'ellipse aux extrémités du petit axe.

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1884 (SECONDE SESSION, OCTOBRE);

SOLUTION PAR M. E. BARISIEN.

On donne, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, *et une droite quelconque coupant ces axes, respectivement, aux points* A *et* B.

On prend sur cette droite un point m dont les coordonnées sont α et β, et l'on construit, dans le plan, un point correspondant M *ayant pour coordonnées*

$$x = \frac{f^2}{\alpha}, \quad y = \frac{g^2}{\beta},$$

f et g étant deux longueurs constantes données.

Cela posé :

1° *On demande d'écrire l'équation du lieu des points* M, *lorsque le point m se déplace sur la droite indéfinie* AB. *Ce lieu est une hyperbole qu'on désignera, dans ce qui va suivre, par la lettre* H.

2° *On demande de déterminer les éléments nécessaires à la définition complète de cette hyperbole* H, *et d'en construire géométriquement un point quelconque, ainsi que la tangente en ce point.*

3° *On suppose que la droite* AB *se déplace dans le plan, de telle façon que la somme des inverses de ses coordonnées à l'origine reste constante, soit de façon que*

$$\frac{1}{\text{OA}} + \frac{1}{\text{OB}} = \frac{1}{l} = \text{const.}$$

A chaque position de la droite répondra une hyperbole H.

On demande de montrer que toutes ces hyperboles ont une corde commune, et de trouver le lieu des pôles de cette corde relativement aux diverses hyperboles (c'est-à-dire le lieu des points pour lesquels elle est corde de contact des tangentes menées de ce point à l'une des hyperboles).

4° *On projette le centre* C *de l'hyperbole* H *répondant à la droite* AB, *sur cette droite, en* D, *et l'on demande de trouver le lieu des points* D *lorsque la droite* AB *se déplace, non plus selon la loi ci-dessus définie, mais en restant parallèle à elle-même.*

I.

Soient $OA = a$, $OB = b$ (*fig.* 1). L'équation de la droite AB est

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Exprimant que le point $m(\alpha, \beta)$ est sur cette droite, on a

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 1.$$

Les coordonnées du point M étant

$$(2) \qquad x = \frac{f^2}{\alpha},$$

$$(3) \qquad y = \frac{g^2}{\beta},$$

l'équation du lieu du point M s'obtiendra en éliminant α

Fig. 1.

et β entre les équations (1), (2) et (3). Cette élimination se fait avec la plus grande facilité, et donne pour résultat

$$xy = \frac{g^2}{b}x + \frac{f^2}{a}y,$$

équation de l'hyperbole (H).

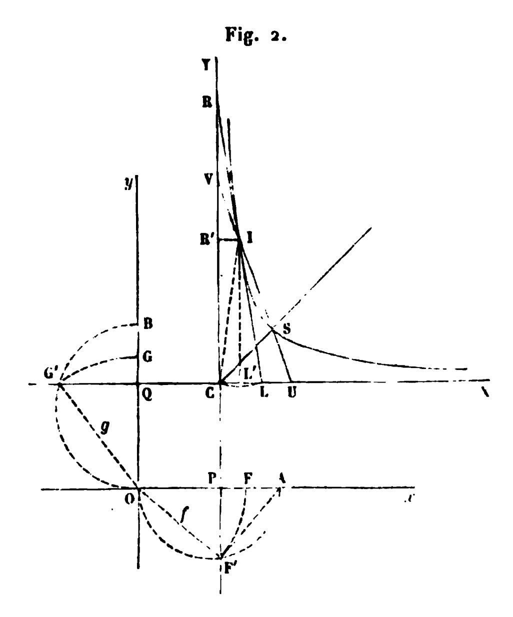
II.

L'hyperbole H a ses asymptotes parallèles aux axes Ox et Oy; elles ont pour équations

$$x = \frac{f^2}{a}, \quad y = \frac{g^2}{b}.$$

Pour construire ces asymptotes, prenons sur Ox (*fig.* 2) une longueur $OF = f$, et sur Oy une longueur $OG = g$. Décrivons sur OA et OB des demi-circonférences; rabattons les points F et G sur ces demi-circonférences,

Fig. 2.



en F' et G', par des arcs de cercle de centre O, et abaissons F'P et G'Q perpendiculaires, respectivement, à Ox et Oy. Ces deux droites qui se coupent au point C sont

les asymptotes CX et CY de l'hyperbole H (¹). Rapportons, momentanément, l'hyperbole aux axes CX et CY : les formules de transformation de coordonnées sont

$$x = X + \frac{f^2}{a},$$

$$y = Y + \frac{g^2}{b},$$

et l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes devient alors

$$\left(X + \frac{f^2}{a}\right)\left(Y + \frac{g^2}{b}\right) = \frac{g^2}{b}\left(X + \frac{f^2}{a}\right) + \frac{f^2}{a}\left(Y + \frac{g^2}{b}\right),$$

qui se réduit à

$$XY = \frac{f^2 g^2}{ab}.$$

Or

$$OP = \frac{f^2}{a}, \quad OQ = \frac{g^2}{b}:$$

donc

$$XY = OP \times OQ.$$

Posons

$$k = \sqrt{OP.OQ},$$

l'hyperbole aura pour équation $XY = k^2$; rien n'est plus facile que de construire k.

Si A représente le demi-axe transverse de cette hyperbole, on sait que

$$k^2 = \frac{A^2}{2},$$

d'où

$$A = k\sqrt{2}.$$

En portant sur la bissectrice de l'angle XCY une longueur CS = A, on aura un des sommets de l'hyperbole.

Pour avoir un point quelconque I de l'hyperbole,

(¹) Les inégalités $f < a$, $g < b$ sont implicitement admises dans cette construction géométrique.

d'après une propriété connue, il suffit de mener une droite SUV rencontrant CX et CY en U et V, et de prendre VI = SU dans l'intérieur de l'angle XCY.

En joignant I, C et prenant IL = IC, le point L étant sur CX, la droite ILR sera la tangente en I, car alors IL = IR, la droite ILR coupant CY en R. C'est encore une propriété connue de la tangente à l'hyperbole.

III.

D'après l'énoncé, nous avons la relation

$$(4) \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{l}.$$

Écrivons, de nouveau, l'équation de l'hyperbole H rapportée aux axes Ox et Oy :

$$(\mathrm{H}) \qquad xy = \frac{g^2}{b}x + \frac{f^2}{a}y.$$

De l'équation (4) nous tirons

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{l} - \frac{1}{a},$$

et, par suite, l'équation de (H) devient

$$xy = g^2x\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{a}\right) + \frac{f^2}{a}y,$$

ou

$$x\left(y - \frac{g^2}{l}\right) = \frac{1}{a}(f^2y - g^2x).$$

Donc l'hyperbole H passe, quel que soit a, par l'intersection des deux lignes que les équations

$$x\left(y - \frac{g^2}{l}\right) = 0, \quad f^2y - g^2x = 0$$

représentent, c'est-à-dire par les deux points dont les

coordonnées sont

$$x = 0,\quad y = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{f^2}{l},\quad y = \frac{g^2}{l}.$$

La corde commune à toutes les hyperboles H est la droite qui unit ces deux points, et qui a pour équation

$$(5) \qquad f^2 y - g^2 x = 0.$$

L'équation de la polaire d'un point (X, Y), par rapport à l'hyperbole (H), est

$$(6) \qquad ax(bY - g^2) + by(aX - f^2) = ag^2 X + bf^2 Y.$$

Pour exprimer que la droite (5) est la polaire du point (X, Y), il faut identifier les équations (5) et (6); ce qui donne

$$\frac{a(bY - g^2)}{g^2} = -\frac{b(aX - f^2)}{f^2} \quad \text{et} \quad ag^2 X + bf^2 Y = 0.$$

Ces deux relations peuvent s'écrire

$$(6) \qquad \frac{X}{f^2} + \frac{Y}{g^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

$$(7) \qquad ag^2 X + bf^2 Y = 0.$$

Pour avoir l'équation du lieu des points (X, Y), il faut éliminer a et b entre (4), (6) et (7). Cette élimination se fait immédiatement en comparant les équations (4) et (6); le lieu des pôles de la droite (5) est donc la droite qui a pour équation

$$\frac{X}{f^2} + \frac{Y}{g^2} = \frac{1}{l}.$$

IV.

L'équation de la droite CD passant par le centre de l'hyperbole H, et perpendiculairement à AB, est

$$\left(X - \frac{f^2}{a}\right)\frac{1}{b} - \left(Y - \frac{g^2}{b}\right)\frac{1}{a} = 0$$

ou

$$(8)\qquad aX - bY = f^2 - g^2.$$

L'équation de AB est

$$(9)\qquad \frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 1.$$

Si AB se déplace parallèlement à une direction donnée, de coefficient angulaire m, on a $m = -\frac{b}{a}$, ou

$$(10)\qquad b = -ma.$$

On aura le lieu des points D en éliminant a et b entre (8), (9) et (10).

Remplaçant b par $-ma$ dans (9) et (8), il vient

$$\frac{1}{a}\left(X - \frac{Y}{m}\right) = 1,$$

$$a(X + mY) = f^2 - g^2.$$

Multiplions, membre à membre, ces dernières équations, nous avons, pour le lieu des points D, la courbe représentée par l'équation

$$(mX - Y)(X + mY) = m(f^2 - g^2).$$

C'est une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les deux droites

$$Y = mX,$$

$$Y = -\frac{1}{m}X \text{ [1]}.$$

---

[1] On peut remarquer que toutes les hyperboles équilatères obtenues en faisant varier le coefficient angulaire m passent par deux points fixes situés sur l'un des deux axes de coordonnées. Car, en posant $X = 0$, ou $Y = 0$, l'équation

$$(mX - Y)(X + mY) = m(f^2 - g^2)$$

donne $Y = \pm\sqrt{-(f^2 - g^2)}$, ou $X = \pm\sqrt{f^2 - g^2}$, valeurs indépendantes de m. Si $f = g$, les deux points coïncident avec l'origine des coordonnées; mais, dans ce cas, l'hyperbole se réduit aux deux asymptotes.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. de Saint-Germain.

J'ai le désir de vous soumettre une observation sur la construction du centre de courbure d'une ellipse, donnée par M. La Chesnais, dans le numéro de mai dernier. L'idée est ingénieuse, mais elle s'appuie sur une proposition erronée : que la développée de l'ellipse est la projection de la courbe $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{c^2}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$, supposée placée dans le plan du cercle ayant l'ellipse pour projection. En réalité, la courbe qui se projette suivant la développée, dans les conditions indiquées, a pour équation

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{b^2}{a}y\right)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}.$$

Il est vrai que la développée de l'ellipse serait la projection de la courbe $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{c^2}{b}\right)^{\frac{2}{3}}$, située dans un plan qui passe par le petit axe de l'ellipse, et que cela permettrait de donner, sous une forme exacte, une construction identique à celle de M. La Chesnais.

La même observation nous a été adressée par M. Juhel-Renoy.

BIBLIOGRAPHIE.

Traité de Géométrie descriptive, par Jules de la Gournerie, 2ᵉ édition; trois Parties accompagnées cha-

cune d'un atlas, et se vendant séparément au prix de 10 fr. Gauthier-Villars, éditeur, Paris.

Le *Traité de Géométrie descriptive* de Jules de la Gournerie est un Ouvrage complet sur cette science, contenant des tracés en harmonie avec ceux de la Stéréotomie, qui a été très favorablement accueilli par le public. En effet, Chasles a présenté cet Ouvrage avec éloge à l'Académie des Sciences. Poncelet, dans son *Traité des propriétés projectives des figures*, le cite comme étant « sans contredit le Traité le plus rationnel, le plus complet et le plus correct de tous ceux qui ont paru jusqu'à ce jour ». Publié de 1860 à 1864, à présent arrivé à la seconde édition, ce Traité, très apprécié à l'étranger, est fréquemment cité en France : M. A. Mannheim, dans son *Cours de Géométrie descriptive à l'École Polytechnique*, renvoie souvent le lecteur au Traité de Jules de la Gournerie; M. Darboux, professeur de Géométrie supérieure à la Sorbonne, parle dans son Cours des travaux de J. de la Gournerie.

Aussi, dans cet article sur une œuvre appréciée d'une manière si favorable par d'éminents géomètres, notre tâche se bornera-t-elle à indiquer les questions et les méthodes, soit principales, soit nouvelles ou peu connues, qu'elle renferme.

La *Première Partie* contient le développement des questions exigées pour l'admission aux Écoles du Gouvernement. La *Seconde* et la *Troisième*, rédigées d'après le Cours que J. de la Gournerie a professé d'une manière brillante, pendant quinze ans, à l'École Polytechnique, conviennent aux candidats à l'Agrégation de mathématiques de l'Enseignement secondaire spécial ; ils y trouveront les théories complètes sur les questions de Géométrie descriptive qu'ils ont à résoudre par écrit, ou à exposer dans des leçons publiques.

Dans la *Première Partie* sont exposées les théories, avec de nombreux exemples et remarques, relatifs aux Figures planes, aux Surfaces cylindriques et coniques, aux Surfaces de révolution, aux Plans cotés; ainsi que les principes du trait des Perspectives axonométrique et cavalière. Cette dernière question se trouve dans peu d'ouvrages. Pour les premières, nous ferons remarquer que J. de la Gournerie considérant, avec raison, que la Géométrie descriptive doit être enseignée surtout au point de vue du trait, a rejeté l'emploi systématique des méthodes de changement de plan de projection et de ro-

tation, proposé, après Desargues, par Théodore Olivier. Les professeurs ont généralement approuvé l'opinion de J. de la Gournerie, et, à présent, on n'expose plus guère de ces méthodes que les cas particuliers employés par les anciens appareilleurs.

La *Seconde Partie* contient d'abord l'étude des Ombres linéaires et d'une question qui s'y rattache, la Transformation homologique, avec de nombreux et intéressants exemples, se rapportant aux projections orthogonales et aux perspectives rapides. Elle renferme ensuite une théorie complète et savante des Surfaces développables. La question des Rebroussements, importante dans cette théorie, est l'objet de remarques nouvelles. Les lignes doubles des surfaces d'ombre, et des surfaces d'égale pente, sont longuement discutées; leurs points limites sont indiqués. On sait que ces lignes doubles sont utiles à déterminer, parce qu'elles limitent l'ombre dans la surface ou l'étendue que peut recevoir une excavation dont les talus ont une pente uniforme. La surface de l'ombre d'une ellipse éclairée par un cercle est étudiée en détail. Au sujet de cette question, l'attention du lecteur est appelée sur les travaux publiés, surtout par Poncelet et Chasles, relativement à la développable circonscrite à deux coniques. Les discussions qui se rapportent aux surfaces du second ordre inscrites à la développable sont facilitées par ce théorème dû à l'Auteur : *Toute surface du second ordre inscrite à la développable coupe celle-ci selon huit droites*. Jules de la Gournerie traite plusieurs exemples de surfaces d'égale pente et présente, au sujet de celle dont la directrice est une conique, d'ingénieux artifices de calcul qui l'ont conduit à des résultats permettant d'établir avec assez de facilité une épure compliquée.

La Seconde Partie se termine par une théorie approfondie des Surfaces gauches. En étudiant géométriquement, tout d'abord, le paraboloïde hyperbolique, le savant Auteur a pu établir des théorèmes qui ont facilité l'étude générale des surfaces gauches. Parmi les propositions nouvelles que l'on rencontre dans la théorie de ces surfaces, citons la propriété que possèdent les lignes d'ombres des surfaces gauches de passer toutes par les points singuliers, que Bour a appelés *sommets*, où deux génératrices consécutives se coupent. Les Conoïdes et le Cylindroïde, avec leurs applications en Stéréotomie, les Surfaces gauches dépourvues de plan directeur et, parmi ces

dernières, l'Hyperboloïde général à une nappe, sont traités d'une manière magistrale. Après avoir établi géométriquement les propriétés fondamentales de ces surfaces, J. de la Gournerie a complété leur théorie par des considérations analytiques, comme il le fait du reste partout dans son Ouvrage.

La *Troisième Partie,* dont la seconde édition vient de paraître, attire l'attention surtout par la manière simple et élégante dont la théorie de la Courbure des surfaces est exposée. Les principales propositions relatives à cette théorie, démontrées en général d'une manière nouvelle et sans avoir recours au Calcul infinitésimal, ainsi que la démonstration de la formule d'Euler, donnant la courbure d'une section normale, ont pour base le théorème de M. J. Bertrand sur l'égalité des déviations des normales à une surface en deux points infiniment voisins d'un point considéré et dans des directions rectangulaires. Le théorème de Meusnier sur la courbure des sections obliques est complété par une formule, permettant de déterminer les rayons de courbure de la section d'une surface par son plan tangent. La théorie précédente est appliquée à la construction des rayons de courbure et des plans osculateurs d'une courbe donnée par ses projections, à celle des sommets des surfaces d'égale pente, au tracé des tangentes à l'intersection de deux surfaces qui se touchent, à la détermination des tangentes et des points singuliers d'une ligne d'ombre. Cette dernière question contient des considérations qui, sans être entièrement nouvelles, lèvent cependant quelques difficultés jusqu'ici non résolues : elles se rapportent aux points réels et virtuels d'une ligne d'ombre et à la détermination des points limites des arcs réels et virtuels. La théorie des Lignes de courbure des surfaces du second ordre est exposée d'après les travaux de Charles Dupin.

En outre, la Troisième Partie contient l'étude des Hélicoïdes réglés ou non, avec beaucoup de détails sur l'Hélicoïde développable et les Ombres des Surfaces de vis, faite d'une manière généralement nouvelle, en employant des constructions simples dues à l'Auteur et à Bour. Elles ont été adoptées, notamment par H. Sonnet dans son *Dictionnaire des Mathématiques appliquées*.

Cette dernière Partie renferme aussi de nombreux développements sur les surfaces topographiques; la construction du plan tangent à ces Surfaces par la méthode de Meusnier est le ré-

sumé d'un Mémoire de M. Lalanne sur leur emploi pour remplacer les Tables à double entrée.

Le grand Traité dont nous venons d'esquisser l'analyse est encore très remarquable en ce qu'il contient l'indication précise, et souvent, le résumé d'un grand nombre de Mémoires, dont les Auteurs sont toujours cités avec un soin scrupuleux. A cet égard, il est indispensable à toute personne qui s'occupe de Géométrie descriptive et même de Géométrie générale.

Ernest Lebon.

Cours de Géométrie élémentaire, à l'usage des candidats au baccalauréat ès sciences et aux Écoles du Gouvernement; par *Alf. Colas,* professeur agrégé de Mathématiques au lycée Henri IV. 2 vol. in-8°. Paris, 1885, Garnier frères, libraires-éditeurs, 6, rue des Saints-Pères.

Comme son titre l'indique, cet Ouvrage s'adresse à la classe, de plus en plus nombreuse, des candidats au baccalauréat ès sciences et aux Écoles du Gouvernement. Les deux Volumes dont il se compose se rapportent, le premier à la Géométrie plane, le second à la Géométrie dans l'espace et aux courbes usuelles. Conformément à l'usage établi, l'Ouvrage entier est partagé en huit Livres consacrés, les quatre premiers à la Géométrie plane, les trois suivants à la Géométrie dans l'espace, et le dernier aux courbes usuelles.

Ces huit Livres constituent un cours très complet, contenant, d'abord, tout ce qu'exigent les programmes du baccalauréat et des diverses écoles; ensuite, sous la forme de chapitres spéciaux, de compléments ou d'appendices, plusieurs matières, à la vérité non exigées, mais néanmoins très utiles; enfin, une foule d'exercices, les uns complètement résolus, les autres simplement proposés.

Les matières exigées par les programmes forment, comme il convient, le fond même de l'Ouvrage. Elles y sont exposées avec le plus grand soin, la plus grande rigueur. L'auteur, instruit par sa longue expérience, n'ignore point que beaucoup de ses lecteurs sont des commençants et *ne présume jamais trop de leur intelligence.* Aussi entre-t-il, sur chaque point, dans de grands détails, et fait-il suivre les démonstrations de

remarques nombreuses. Il n'oublie jamais, d'ailleurs, de définir ses notations; pour rendre le langage plus clair, il ne craint pas de placer des chiffres ou des lettres dans les angles mêmes des figures; il cite les inventeurs des théorèmes et met sur chacun d'eux, en renvois au bas des pages, quelques notes biographiques; enfin, lorsqu'une définition, comme celle de la tangente, doit recevoir plus tard une forme nouvelle, il ne manque point de faire connaître cette forme.

A côté des théories exigées par les programmes, il est des matières très utiles, que tous les livres ne contiennent pas, et que les bons élèves sont jaloux d'apprendre. Ces matières sont de deux sortes : les unes consistant simplement en un développement des théories exigées, les autres constituant les premières notions de ce qu'on appelle la *Géométrie moderne*. Parmi les matières de l'une ou de l'autre sorte qui figurent dans l'Ouvrage que nous analysons, nous devons citer : dans le livre III, les transversales et les triangles homologiques; l'homothétie; les faisceaux harmoniques; les pôles et polaires; la méthode des polaires réciproques; les figures inverses; les axes radicaux; — dans le livre VI, les théorèmes d'Euler et de Legendre; les centres des moyennes distances et des distances proportionnelles; le volume du tronc de prisme à base polygonale; — dans le livre VII, le théorème de Guldin sur les volumes tournants; des généralités sur les surfaces, le plan tangent et la normale; la construction des polyèdres réguliers; l'homothétie dans l'espace; les pôles et polaires par rapport à la sphère; le plan radical de deux sphères; les figures inverses dans l'espace; enfin, une théorie assez étendue des figures tracées sur la sphère.

Du commencement à la fin de l'Ouvrage, chaque Chapitre contient, comme applications du cours même, un grand nombre d'exercices proposés ou résolus. Les exercices proposés sont très variés : ce sont tantôt des problèmes à résoudre, tantôt des théorèmes à démontrer, tantôt des lieux géométriques à déterminer. Les exercices résolus, qui précèdent toujours les exercices proposés, sont nombreux et choisis avec beaucoup de soin; on trouve parmi eux la plupart des problèmes posés aux examens, le cercle des neuf points, le théorème de M. Peaucellier, etc., etc. Ces exercices résolus sont tous exposés dans le plus grand détail et discutés de la manière la plus méthodique et la plus complète; ce sont autant de modèles à

imiter : ils constituent tous ensemble une sorte de cours, des plus instructifs, pour la résolution des exercices proposés et, en général, de tous les problèmes de Géométrie.

En résumé, parmi les Traités de Géométrie parus dans ces derniers temps, l'Ouvrage que nous analysons est certainement l'un des meilleurs. Il est tel qu'on pouvait l'attendre de son auteur, c'est-à-dire d'un de nos professeurs les plus expérimentés et les plus consciencieux. DÉSIRÉ ANDRÉ.

LES APPAREILS A CALCULS EXACTS ET INSTANTANÉS pour simplifier la multiplication et la division, inventés par M. *Henri Genaille*, et perfectionnés par M. *Édouard Lucas*.

Ces appareils ont pour but de diminuer le travail de la pensée dans la pratique de toutes sortes de calculs, par la simplification et, pour ainsi dire, par la suppression de la multiplication et de la division. Au lieu de rechercher des appareils encombrants et très coûteux, d'un maniement toujours délicat, les inventeurs se sont proposé d'obtenir des appareils portatifs, d'un fonctionnement facile et régulier, d'un prix accessible à tous.

En se basant sur le principe de la division du travail et sur la théorie des permutations, M. Henri Genaille a imaginé un nouveau système tellement élémentaire qu'il est, en quelques minutes, à la portée des enfants et des esprits les plus rebelles à la science de l'Arithmétique. Ces méthodes ont reçu, à diverses reprises, les précieux encouragements de l'*Association française pour l'avancement des Sciences,* aux Congrès de Montpellier, de Reims, de Paris, de Rouen et de Blois; perfectionnées par M. Édouard Lucas, elles ont été approuvées par les savants les plus illustres de l'Europe, par tous les ingénieurs, par tous les professeurs, etc. Elles n'ont aucun rapport avec la théorie des logarithmes.

I. Les *multiplicatrices* se composent de onze réglettes carrées renfermées dans une boîte de $0^m,01$ d'épaisseur, $0^m,12$ de largeur et $0^m,18$ de longueur; en les plaçant dans l'ordre convenable, on obtient instantanément les produits de tous les nombres qui ne dépassent pas dix chiffres par un nombre d'un seul chiffre. La pratique de ces réglettes est aussi facile que celle qui consiste à suivre un chemin, à travers un labyrinthe,

au moyen de mains indicatrices dessinées sur des poteaux placés aux carrefours, c'est-à-dire que l'on apprend à se servir de ces réglettes en une minute, au plus. Avec deux boîtes, on obtient tous les produits partiels de tous les nombres jusqu'à vingt chiffres; or, si l'on voulait cataloguer tous ces résultats dans des volumes de mille pages à cent lignes par page, il faudrait, pour contenir ces volumes, une *centaine de millions de bibliothèques* comme la Bibliothèque nationale, en supposant que celle-ci renferme dix millions de volumes! Avec trois boîtes, on aurait les produits partiels jusqu'à trente chiffres, et ainsi de suite, indéfiniment.

II. Les *multisectrices* se composent de onze réglettes carrées renfermées dans une boîte de mêmes dimensions que la précédente. Elles donnent instantanément, et sans aucun calcul, tous les chiffres du quotient et le reste de la division d'un nombre quelconque de dix chiffres au plus avec une seule boîte, et de vingt chiffres avec deux boîtes, par les dix premiers nombres.

III. Les *financières* se composent encore de onze réglettes renfermées dans une boîte semblable aux précédentes. Elles donnent instantanément, et sans aucun calcul, tous les chiffres du nombre qui correspond à l'intérêt d'une somme quelconque pour un jour, aux taux de *trois, quatre, quatre et demi, cinq, six, neuf pour cent* par an. Elles donnent encore, sans aucun effort intellectuel, le *douzième* et le *vingtième* d'une somme quelconque. Ces réglettes sont indispensables aux commerçants, aux banquiers, aux notaires, aux percepteurs, aux employés des banques et des compagnies d'assurances, etc.; en un mot, à tous ceux qui s'occupent de calculs financiers et commerciaux.

IV. Les *népériennes* se composent de onze réglettes contenant sur leurs quatre faces les colonnes de la table de multiplication. Elles forment une Table de Pythagore, disloquée pour ainsi dire, mais qui révèle les opérations successives de la multiplication et de la division. Elles apportent un perfectionnement utile et pratique au *Procédé rhabdologique,* imaginé par l'un des inventeurs des logarithmes, Jean Neper, baron de Markinston (Ecosse), en 1617. Elles s'adressent à tous, et plus spécialement aux professeurs, aux instituteurs, aux papas, aux mamans, dans le but de faciliter et de développer chez les enfants l'enseignement et la pratique des quatre règles de l'Arithmétique.

C'est le *joujou calculateur* le plus parfait.

V. Le *calendrier perpétuel à roulette* donne instantanément, sans aucun calcul, le nom du jour de la semaine qui correspond à une date quelconque du calendrier grégorien ou du calendrier julien. Il est de la grandeur d'un calendrier ordinaire; mais, bien qu'il renferme moitié moins de chiffres que le calendrier annuel, il est valable, depuis l'ère chrétienne, pendant *quarante siècles* et plus.

Ce calendrier est indispensable pour le savant, pour l'historien, dans toutes les recherches historiques, biographiques, bibliographiques; il permet de trouver le jour qui correspond à la date d'un fait mémorable des siècles passés. Son utilité est encore incontestable pour l'homme d'affaires, pour le banquier, pour le négociant, dans les calculs financiers et commerciaux; car on prévoit le jour de l'échéance d'un billet ou d'une traite, d'une livraison ou d'un engagement. Sa propagation est aussi indiquée dans les écoles, car il résume et synthétise toute la théorie du calendrier. Enfin, dans la vie ordinaire, il permet de retrouver les jours chers au souvenir, ceux de tel événement heureux ou malheureux dans la famille, le jour d'une naissance, d'un mariage, etc.

Afin d'éviter le léger inconvénient qui résulte du déplacement des réglettes, les inventeurs ont imaginé des appareils plus parfaits en reproduisant les chiffres et les dessins sur des toiles glissant autour de rouleaux. Ces appareils, qui seront construits avec le plus grand soin, trouveront tout naturellement leur place dans les bureaux de l'ingénieur, de l'architecte, du banquier, de l'homme d'affaires.

Les boîtes et les appareils précédents représentent une première série d'instruments utiles, pratiques et peu coûteux [1]; d'autres séries suivront incessamment. Elles formeront toute

---

(1) Les *multiplicatrices*, la boîte........... 1 fr.
Les *multisectrices*, la boîte............. 1 »
Les *financières*, la boîte................. 1 »
Les *népériennes*, la boîte............... 1 »

Chacune des boîtes précédentes, franco par la poste au reçu de 1 fr. 20 en un mandat ou en timbres-poste.

Le *calendrier perpétuel à roulette*..... 0 fr. 75 c.

Franco par la poste au reçu de 1 fr. 05 c. en un mandat ou en timbres-poste.

une collection préparée en vue de l'*Exposition universelle* de 1889, et dont l'ensemble a pour but de faciliter, de simplifier, de soulager, et en même temps de développer, de fortifier, dans toutes les combinaisons de la science et de l'art, du commerce et de l'industrie, le travail de la pensée humaine.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1362

(voir 2e série, t. XX, p. 192);

PAR M. ÉMILE CHRÉTIEN.

On donne, sur un plan : un point o, une circonférence, les extrémités a et b d'un diamètre de cette courbe et un autre diamètre D. *On demande de déterminer, sur la circonférence, un point m tel que les droites ma, mb interceptent sur* D *un segment vu du point o sous un angle droit.* (MANNHEIM.)

Lorsque le point m se déplace sur la circonférence, les droites ma et mb déterminent sur le diamètre D deux divisions homographiques ; soient c et c' deux points homologues. Joignons c, o, et par le point o menons à la droite co une perpendiculaire qui coupera D en un point c''. Lorsque le point c se déplacera, au rayon co correspondra toujours un rayon oc'' ; donc les systèmes de points c et c'' seront homographiques ; or les systèmes de points c' et c'' sont homographiques d'un même troisième : donc ils sont homographiques entre eux.

Pour trouver le point m tel que les droites ma et mb interceptent sur D un segment vu du point o sous un angle droit, il faudra chercher les points doubles des

deux divisions homographiques déterminées par trois couples de points c' et c''. Un de ces points doubles étant déterminé, on le joindra au point b par une droite qui rencontrera la circonférence au point m cherché. Comme il y a deux points doubles, il y aura deux points m si les points doubles sont réels.

La même question a été résolue par MM. Frédéric Amoder, élève de l'École de Magistero, de Naples; Ferdinando Pisani, professeur du Royal Institut technique de Messine; Lez; Herzogue, du Lycée de Rouen.

Question 1489

(voir 3ᵉ série, t. III, p. 351);

PAR M. CATALAN.

p étant un nombre premier, et P un polynôme entier, à coefficients entiers, l'équation

$$(1)\qquad (x+y)^p - x^p - y^p = pxy(x+y)P^2$$

n'est vérifiée que par

$$p=7,\quad P = x^2+xy+y^2.$$

Solution. — Si l'équation (1) est identique, x et y étant quelconques, elle le sera pour $x=1$, $y=1$. Mais alors cette équation prend la forme

$$(2)\qquad 2^{p-1}-1 = p.N^2,$$

N étant un *nombre entier*.

Celle-ci exige que

$$p=7,\quad N=3\ (^1).$$

(¹) *Mathesis*, t. III, p. 41 et 81.

L'équation

$$(2)\qquad 2^{p-1}-1 = p.N^2$$

Remarques. — I. En 1881, j'ai proposé, dans *Mathesis*, la question suivante :

D'après le théorème de Fermat,

$$2^{p-1} - 1 = pN.$$

Comment doit-on prendre le nombre premier p, *pour que* N *soit un carré?*

Si mes souvenirs sont exacts, la solution due à M. Édouard Lucas, publiée dans ce Recueil, diffère peu de celle que j'avais trouvée de mon côté.

II. Lorsque $p = 7$, l'équation (1) se réduit, tout de suite, à

$$x^5 + 3x^4y + 5x^3y^2 + 5x^2y^3 + 3xy^4 + y^5 = (x+y)P^2;$$

puis à

$$x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 = P^2;$$

etc.

III. En général,

$$\begin{aligned}\frac{(x+y)^p - x^p - y^p}{xy(x+y)} &= [C_{p-1,1}+1]x^{p-3} + [C_{p-1,2}-1]x^{p-4}y \\ &\quad + [C_{p-1,3}+1]x^{p-5}y^2 + \ldots + [C_{p-1,1}+1]y^{p-3}.\end{aligned}$$

Et si, comme on l'a supposé, p est un nombre premier, *tous les coefficients,* dans le second membre, *sont divisibles par* p (1).

---

est vérifiée par $p = 3$, $N = 1$. Mais cette valeur de p ne conduit pas à une solution de l'équation (1) proposée, car elle donne $P^2 = 1$.

Il faut donc admettre l'inégalité $p > 3$.

En supposant $p > 3$, on trouve la solution $p = 7$ au moyen d'un calcul qui ne présente aucune difficulté (*voir* p. 523). (G.)

(1) Proposition connue, évidente à l'inspection du polynôme

$$\frac{p}{1}x^{p-1}y + \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}y^2 + \ldots + \frac{p}{1}xy^{p-1}.$$

Si, par exemple, $p = 11$, on trouve

$$\frac{(x+y)^{11}-x^{11}-y^{11}}{xy(x+y)} = 11x^8 + 44x^7y + 121x^6y^2 + 209x^5y^3 + 253x^4y^4 + 209x^3y^5 + 121x^2y^6 + 44xy^7 + 11y^8,$$

ou

$$\frac{(x+y)^{11}-x^{11}-y^{11}}{11xy(x+y)} = x^8 + 4x^7y + 11x^6y^2 + 19x^5y^3 + 23x^4y^4 + 19x^3y^5 + 11x^2y^6 + 4xy^7 + y^8.$$

IV. Plus généralement,

$$\frac{(x+y+z)^p - x^p - y^p - z^p}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$
$$= (x+y+z)^{p-3} + H_1(x+y+z)^{p-4} + H_2(x+y+z)^{p-5} + \ldots + H_{p-3} + 2H_{\frac{p-3}{2}}(x^2, y^2, z^2).$$

Dans le second membre, H_1, H_2, ..., H_{p-3} sont des polynômes *homogènes,* dont tous les coefficients sont égaux à l'unité; savoir :

$$H_1 = x+y+z, \quad H_2 = x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy, \quad \ldots.$$

En particulier,

$$\frac{(x+y+z)^7 - x^7 - y^7 - z^7}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$
$$= (x+y+z)^4 + (x+y+z)(x+y+z)^3$$
$$+ (x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)(x+y+z)^2$$
$$+ (x^3+y^3+z^3+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+x^2y+xy^2+xyz)(x+y+z$$
$$+ x^4+y^4+z^4+y^3z+yz^3+z^3x+zx^3+x^3y+xy^3$$
$$+ x^2yz+y^2zx+z^2xy+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2$$
$$+ 2(x^4+y^4+z^4+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)$$ [1].

V. D'après une formule connue [2], les nombres de termes des polynômes

$$H_1, H_2, H_3, \ldots, H_{p-4}, H_{p-3}, H_{\frac{p-3}{2}}$$

(1) *Mélanges mathématiques,* t. I, p. 182.
(2) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège,* p. 44.

sont, respectivement,

$$3,\ 6,\ 10,\ \ldots,\ \tfrac{1}{2}(p-2)(p-3),\ \tfrac{1}{2}(p-1)(p-2),\ \tfrac{1}{8}(p+1)(p-1).$$

Donc, si l'on suppose $x = y = z = 1$, on aura

$$\tfrac{1}{8}(3^{p-1}-1) = 3^{p-3} + 3.3^{p-4} + 6.3^{p-5} + \ldots + \tfrac{1}{2}(p-2)(p-3).3$$
$$+ \tfrac{1}{2}(p-1)(p-2) + \tfrac{1}{8}(p+1)(p-1);$$

puis, comme le dernier binôme égale $\frac{3}{4}(p-1)^2$:

$$\tfrac{1}{8}(3^{p-1}-1) = 3^{p-4} + 3.3^{p-5} + 6.3^{p-6} + \ldots$$
$$+ \tfrac{1}{2}(p-2)(p-3) + \tfrac{1}{4}(p-1)^2.$$

VI. En vertu du théorème de Fermat, le premier membre est divisible par p [1]. Le second membre jouit donc de la même propriété, laquelle n'est, peut-être, pas évidente *a priori*.

Note. — La même question a été résolue par MM. J. Neuberg, Moret-Blanc; Juhel-Renoy.

NOTE.

Sur la *résolution en nombres entiers et positifs de l'équation*

$$(1) \qquad 2^{p-1} - 1 = p.N^2,$$

où p représente un nombre premier, plus grand que 3.

L'équation (1) proposée revient à

$$(2) \qquad \left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right) = p.N^2.$$

Les deux facteurs $\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right)$, $\left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)$ sont premiers entre eux, parce qu'ils sont impairs et que leur différence est 2. Par conséquent, il faut, d'après l'équa-

---

[1] On suppose $p > 3$.

tion (2), que l'un d'eux soit carré exact, et l'autre, le produit d'un carré par le nombre premier p.

Or, c'est, nécessairement, le premier facteur $\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right)$ qui doit être un carré exact, car le second, $2^{\frac{p-1}{2}}-1$, est un nombre de la forme $4n+3$.

Soit donc

$$2^{\frac{p-1}{2}}+1=M^2;$$

d'où

$$2^{\frac{p-1}{2}}=M^2-1=(M+1)(M-1).$$

Il est évident que $M+1$ et $M-1$ sont des puissances du nombre 2. Et il résulte de l'identité $(M+1)-(M-1)=2$ que $(M-1)$ ne peut être une puissance de 2 supérieure à la première. Donc

$$M-1=2;\quad M=3;\quad M^2-1=8=2^3;$$

et, par suite,

$$2^{\frac{p-1}{2}}=2^3,\quad \frac{p-1}{2}=3,\quad p=7.$$

C'est ce qu'il fallait trouver.

Question 1500

(voir 2e série, t. III, p. 400);

Les projections orthogonales d'un point quelconque d'une hyperbole équilatère sur les côtés d'un triangle inscrit déterminent une circonférence qui passe par le centre de la courbe. (P. Terrier.)

Note de M. H. Brocard.

Cette proposition n'est pas nouvelle. On la trouve énoncée et démontrée par Bobillier, dans un *Mémoire sur l'hyperbole équilatère*, inséré au t. XIX (juin 1829) des *Annales de Gergonne*, p. 349-359.

La démonstration est fondée sur la propriété de l'hyperbole équilatère d'avoir pour polaire réciproque, par rapport à un cercle directeur de rayon arbitraire, ayant son centre sur le périmètre de la courbe, une parabole admettant pour directrice la tangente menée à l'hyperbole par le centre du cercle, et pour foyer, le pôle du diamètre non transverse de cette hyperbole, perpendiculaire à celui qui va au centre de ce cercle (p. 353).

L'axe et le sommet de cette parabole peuvent être aisément déterminés (p. 354).

Le Mémoire de Bobillier renferme plusieurs théorèmes, dont quelques-uns, retrouvés par d'autres géomètres, ont servi de base à d'intéressantes recherches.

On peut citer, par exemple, les suivants :

L'hyperbole équilatère est sa propre polaire réciproque, par rapport au cercle concentrique bitangent (p. 350).

Si un rectangle a ses côtés respectivement parallèles aux asymptotes d'une hyperbole équilatère, et deux sommets opposés sur cette courbe, la diagonale qui joint les deux sommets restants passe par le centre de l'hyperbole (p. 358).

Ce théorème a été rencontré aussi par M. P.-H. Schoute, qui a donné au rectangle ainsi défini le nom de *rectangle asymptotique,* et en a déduit de nombreuses notions relatives à une certaine courbe, du quatrième ordre, douée de trois points doubles (voir *Bulletin des Sciences mathématiques,* t. XIX, p. 278-280, 1884, et *Congrès de Blois,* p. 42-47, 1884).

Bobillier n'a pas manqué de généraliser les résultats qui précèdent, et de les étendre à une conique quelconque (p. 358), mais il vaut mieux les étudier dans le Mémoire original.

Question 1518

(voir 3e série, t. III, p. 544);

PAR M. J. RICHARD,
Élève de l'École Normale supérieure.

Trouver une courbe plane telle que la projection de son rayon de courbure en un point M, *sur une droite fixe du plan, soit proportionnelle à la partie de la tangente au point* M, *comprise entre ce point et la droite fixe.*

Soient x et y les coordonnées du point M de la courbe cherchée, la droite fixe étant prise pour axe des x; soit α l'angle de la tangente en M avec l'axe des x; s la différentielle de l'arc au point M.

On sait que le rayon de courbure a pour expression $\frac{ds}{d\alpha}$; ce rayon étant perpendiculaire à la tangente en M, sa projection sur l'axe des x est égale à $\frac{ds}{d\alpha}\sin\alpha$; or, $ds\sin\alpha = dy$: donc cette projection a pour valeur $\frac{dy}{d\alpha}$.

D'autre part, la partie de la tangente comprise entre le point M et l'axe des x est évidemment égale à $\frac{y}{\sin\alpha}$; donc on doit avoir, $\frac{1}{n}$ désignant une constante,

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{1}{n}\,\frac{y}{\sin\alpha}$$

ou

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{n}\,\frac{d\alpha}{\sin\alpha};$$

d'où, en intégrant, et désignant par $\frac{1}{n}\log C$ la constante arbitraire,

$$\log y = \frac{1}{n}\log\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{n}\log C,$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = Cy^n.$$

On a, d'ailleurs,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\alpha$$

ou bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Remplaçant, dans cette équation, $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$ par sa valeur, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2Cy^n}{1-C^2y^{2n}},$$

d'où

$$dx = \frac{dy}{2}\left(\frac{1-C^2y^{2n}}{Cy^n}\right)$$

ou bien

$$dx = \frac{dy}{2}\left(\frac{1}{C}y^{-n} - Cy^n\right);$$

et, en intégrant et désignant par x_0 la constante arbitraire,

$$x - x_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}\frac{y^{1-n}}{1-n} - \frac{Cy^{1+n}}{1+n}\right).$$

Toutefois cela suppose $n \gtrless 1$; si $n = 1$, on a

$$x - x_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}\log y - C\frac{y^2}{2}\right).$$

La courbe proposée est précisément celle que l'on trouverait en résolvant la question suivante :

Un point mobile parcourt une droite OX *d'un mouvement uniforme; il est poursuivi par un autre mobile qui se dirige constamment vers lui. Le rapport des deux vitesses est n : trouver la courbe décrite par le second mobile.*

En d'autres termes, la courbe que nous venons de considérer est une courbe de poursuite.

La même question a été résolue par MM. Juhel-Renoy, Moret-Blanc, Launoy, Bassani, d'Ocagne.

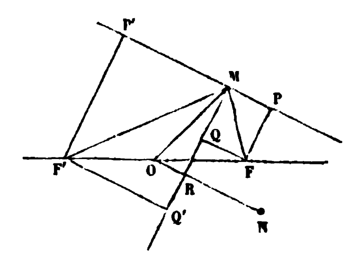
Question 1535

(voir 3e série, t. IV, p. 391);

PAR M. JUHEL-RÉNOY.

Le produit des distances des foyers d'une ellipse à une normale à cette courbe est égal au carré du demi-diamètre perpendiculaire à cette normale, moins le carré du demi petit axe. (D'OCAGNE.)

Soient F, F' les foyers, O le centre d'une ellipse; MP et MQ la tangente et la normale, en M, à la courbe; Q et Q' les pieds des perpendiculaires abaissées de F et F'



sur la normale; P et P' les projections de F et F' sur la tangente; R la projection du centre O sur la normale; soit enfin α l'angle de la tangente et du rayon vecteur MF.

On a

$$PF = QF \operatorname{tang} \alpha,$$
$$P'F' = Q'F' \operatorname{tang} \alpha.$$

Or, le produit des perpendiculaires abaissées des foyers

sur une tangente égale le carré du demi petit axe : donc

$$QF.Q'F' = b^2 \cot^2\alpha = \frac{b^2}{\sin^2\alpha} - b^2.$$

Soit N le point où le diamètre OR coupe l'ellipse. Le second théorème d'Apollonius fournit la relation

$$MR.ON = ab.$$

Or, R étant le milieu de QQ',

$$2MR = MQ + MQ' = (MF + MF')\sin\alpha = 2a\sin\alpha;$$

par suite,

$$a.ON\sin\alpha = ab,$$

d'où

$$ON = \frac{b}{\sin\alpha},$$

et finalement

$$QF.Q'F' = \overline{ON}^2 - b^2,$$

ce qui démontre la proposition ([1]).

La Géométrie analytique conduit au même résultat.

([1]) La proposition énoncée est un corollaire du théorème suivant, qui est connu :

Le produit MF.MF' *des rayons vecteurs, menés d'un point* M *de l'ellipse aux deux foyers, est égal au carré du rayon* ON *perpendiculaire à la normale au point* M.

Cela admis, soient f, f' les rayons vecteurs MF, MF'; M l'angle FMF'; p le demi-périmètre $a + c$ du triangle FMF'. On a, évidemment,

$$QF.Q'F' = f.f'.\sin^2\frac{M}{2}.$$

Mais, d'après une formule de la Trigonométrie,

$$ff'\sin^2\frac{M}{2} = (p-f)(p-f') = p^2 - p(f+f') + ff'.$$

Donc

$$QF.Q'F' = (a+c)^2 - (a+c)\times 2a + ff' = -b^2 + ff' = \overline{ON}^2 - b^2.$$

C. Q. F. D.

(G.)

Soit, en effet,

$$bY\cos\varphi - aX\sin\varphi + c^2\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

l'équation de la normale en M.

Le produit des distances des foyers à cette normale sera, en remarquant que les foyers sont situés de part et d'autre de la normale,

$$\frac{-c^2(c\cos\varphi - a)(c\cos\varphi + a)\sin^2\varphi}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} = c^2\sin^2\varphi,$$

$$c^2\sin^2\varphi = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi - b^2.$$

Or $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ étant les coordonnées du point M, les coordonnées de l'extrémité du diamètre conjugué à OM, c'est-à-dire perpendiculaire à la normale en M, sont $-a\sin\varphi$, $-b\cos\varphi$, et, par suite, le carré de ce demi-diamètre est

$$a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi.$$

La proposition est donc démontrée.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc et M. Bassani, professeur au lycée, à Padoue.

Question 1537

(voir 3e série, t. IV, p. 391);

PAR M. H. BASSANI,
Professeur au lycée de Padoue (Sicile).

On considère les pieds des quatre normales menées d'un même point à une ellipse : démontrer que le rapport de la moyenne géométrique des abscisses de ces quatre pieds à leur moyenne arithmétique est constant et égal au demi grand axe de l'ellipse. Le même rap-

port, relatif aux ordonnées, est égal au demi petit axe (¹). (BARISIEN.)

Désignons par $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$ l'équation de l'ellipse, et par x_0, y_0 les coordonnées d'un point P; d'où l'on mène les normales à la courbe.

Soient x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 les coordonnées des pieds des quatre normales menées du point P. L'équation de l'hyperbole passant par ces quatre points sera

$$a^2x_0y - b^2y_0x - c^2xy = 0.$$

Si l'on élimine x, ou y, entre ces deux équations, on obtient une équation en x, ou en y, du quatrième degré, qui donne les abscisses, ou les ordonnées, des pieds des quatre normales.

On trouve, pour les deux cas,

$$(1) \qquad c^4x^4 - 2a^2c^2x_0x^3 + \ldots - a^6x_0^2 = 0,$$

$$(2) \qquad c^4y^4 + 2b^2c^2y_0y^3 + \ldots - b^6y_0^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{2a^2x_0}{c^2} \quad \text{et} \quad x_1x_2x_3x_4 = -\frac{a^6x_0^2}{c^4},$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = -\frac{2b^2y_0}{c^2} \quad \text{et} \quad y_1y_2y_3y_4 = -\frac{b^6y_0^2}{c^4},$$

et, par suite,

$$\sqrt{x_1x_2x_3x_4} = \frac{a^3x_0}{c^2}, \quad \sqrt{y_1y_2y_3y_4} = \frac{b^3y_0}{c^2} \ (^2).$$

Ce qui donne

$$\frac{\sqrt{x_1x_2x_3x_4}}{\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2}} = a \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{y_1y_2y_3y_4}}{\frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{2}} = b.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

(¹) On entend ici par moyenne géométrique la racine carrée du produit des quatre quantités considérées, et par moyenne arithmétique leur demi-somme.

(²) En valeurs absolues, c'est-à-dire sans avoir égard aux signes.

Question 1543

(voir 3e série, t. IV, p. 392);

PAR UN ANONYME.

On donne l'une des deux asymptotes d'une hyperbole équilatère, une tangente, et un point de la courbe : déterminer le centre et les autres éléments de la courbe. (Construction géométrique.)

La solution suivante s'appuie sur cette proposition :

Les projections d'un point quelconque d'une hyperbole équilatère, sur une tangente et sur la droite menée du centre au point de contact, sont à égale distance du centre de la courbe.

Cela admis, soient OX et CM l'asymptote et la tangente données; P le point donné sur l'hyperbole; O le centre de la courbe; M le point de contact de la tangente CM, et C le point d'intersection de l'asymptote et de la tangente (1).

Les droites OM, CM étant égales entre elles, l'angle MOC = MCO; cette égalité fait connaître la direction de la droite OM, et, par suite, la perpendiculaire PA abaissée du point P sur la droite OM est déterminée de position.

Soient encore PB la perpendiculaire menée à la tangente CM par le point P, et B' le symétrique du point B, par rapport à l'asymptote OX.

On a d'abord

$$OB' = OB;$$

puis

$$OB = OA,$$

d'après la proposition énoncée.

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

Or l'égalité des trois droites OB′, OB, OA montre que O est le centre d'une circonférence tangente à la droite PA en A, et passant par les deux points B′, B. La détermination du centre de l'hyperbole est ainsi ramenée à cette question de Géométrie élémentaire, dont la solution est bien connue : Faire passer par deux points donnés une circonférence tangente à une droite.

Le centre O de l'hyperbole étant ainsi obtenu, on élèvera en ce point à l'asymptote OX une perpendiculaire OY qui sera la seconde asymptote de l'hyperbole, et l'on sait comment on détermine les axes d'une hyperbole dont on connaît un point et les deux asymptotes.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1544

(voir 3e série, t. IV, p. 392);

PAR M. MORET-BLANC.

On donne une parabole et un point dans son plan; par ce point on mène une sécante quelconque, et, sur la corde ainsi déterminée, prise comme diamètre, on décrit un cercle. Trouver l'enveloppe de la polaire du sommet de la parabole, par rapport à ce cercle.

(WOLSTENHOLME.)

Soient $y^2 = 2px$ l'équation de la parabole; α, β les coordonnées du point donné; $y - \beta = m(x - \alpha)$ sera l'équation de la sécante.

Éliminant x entre ces deux équations, on a, pour déterminer les ordonnées des extrémités de la corde interceptée,

$$my^2 - 2py + 2p(\beta - m\alpha) = 0,$$

équation dont les racines y', y'' sont déterminées par

$$y = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2pm(\beta - m\alpha)}}{m}.$$

On a ensuite

$$\frac{y'+y''}{2} = \frac{p}{m} = y_1,$$

$$\frac{y'-y''}{2} = \frac{\sqrt{p^2 - 2pm(\beta - m\alpha)}}{m},$$

$$\frac{y'^2-y''^2}{4p} = \frac{x'-x''}{2} = \frac{\sqrt{p^2 - 2pm(\beta - m\alpha)}}{m^2},$$

$$\frac{x'+x''}{2} = \frac{y_1 - (\beta - m\alpha)}{m} = \frac{p - m(\beta - m\alpha)}{m^2} = x_1.$$

L'équation de la circonférence décrite sur la corde considérée, comme diamètre, est

$$x^2 + y^2 - 2x_1 x - 2y_1 y + x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0,$$

et celle de la polaire de l'origine, sommet de la parabole :

$$x_1 x + y_1 y - x_1^2 - y_1^2 + r^2 = 0,$$

$$r^2 = \left(\frac{x'-x''}{2}\right)^2 + \left(\frac{y'-y''}{2}\right)^2 = \frac{[(1+m^2)(p^2 - 2pm(\beta - m\alpha)]}{m^4}.$$

Remplaçant x_1, y_1 et r^2 par leurs valeurs, multipliant par m^2, et réduisant, l'équation de la polaire devient

$$(p - \beta m + \alpha m^2)x + pmy - (\beta - m\alpha)^2 - 2pm(\beta - m\alpha) = 0$$

ou, en ordonnant par rapport à m,

$$(1)\quad (\alpha x + 2p\alpha - \alpha^2)m^2 + (py - \beta x + 2\alpha\beta - 2p\beta)m + px - \beta^2 = 0.$$

On aura l'équation de l'enveloppe, en éliminant m entre cette équation et sa dérivée par rapport à m,

$$(2)\quad 2(\alpha x + 2p\alpha - \alpha^2)m + py - \beta x + 2\alpha\beta - 2p\beta = 0.$$

Ajoutant ces équations multipliées, respectivement, par 2 et $-m$, on a

$$(3)\qquad (py - \beta x + 2\alpha\beta - 2p\beta)m + 2(px - \beta^2) = 0.$$

Enfin, l'élimination de m entre les équations (2) et (3) donne

$$(py - \beta x + 2\alpha\beta - 2p\beta)^2 - 4\alpha(x + 2p - \alpha)(px - \beta^2) = 0.$$

La courbe, représentée par cette dernière équation, est une ellipse, ou une hyperbole, suivant que l'on a $\alpha < 0$, ou $\alpha > 0$.

Si $\alpha = 0$, la polaire passe par le point fixe

$$x = \frac{\beta^2}{p}, \quad y = 2\beta + \frac{\beta^3}{p^2}.$$

Son enveloppe se réduit à ce point.

Dans le cas général, la courbe est tangente aux droites $x = \alpha - 2p$ et $x = \frac{\beta^2}{p}$; la corde de contact est la droite représentée par l'équation

$$py - \beta x + 2\alpha\beta - 2p\beta = 0.$$

QUESTIONS.

1554. Si x, y, z sont trois nombres positifs, dont la somme est égale à l'unité, on a

$$(1 - x)(1 - y)(1 - z) > 8xyz.$$

(Wolstenholme.)

1555. D'un point P pris sur une strophoïde droite, on mène deux tangentes à la courbe; soient T, T' les points de contact. L'enveloppe de la corde TT' est une parabole ayant même sommet que la strophoïde, et dont le foyer est le symétrique du point double, par rapport à ce sommet commun. (Fauquembergue.)

1556. Les perpendiculaires aux côtés d'un triangle donné ABC, aux points où ils sont rencontrés par une transversale quelconque d, forment un nouveau triangle

A'B'C'. Démontrer : que les droites AA', BB', CC' se coupent en un même point M, commun aux circonférences ABC et A'B'C'; que celles-ci sont orthogonales, et que les droites de Simson, du point M, par rapport aux deux triangles, sont parallèles à d. (J. Neuberg.)

1557. Par un point M, pris d'une manière quelconque sur le côté BC du triangle ABC, on mène des parallèles aux côtés AC, AB. Ces droites coupent, respectivement, aux points B', C' les côtés AB et AC. Démontrer que, si la droite qui joint le sommet A au point I de rencontre des droites B'C et BC' coupe la droite B'C' au point M', on a

$$\frac{M'B'}{M'C'} = \frac{MB}{MC}.$$

(D'Ocagne.)

1558. Le lieu des centres de toutes les coniques ayant un contact du troisième ordre, au même point, d'une conique donnée, est une ligne droite. (Barisien.)

1559. Étant données l'arête de base et la hauteur d'une pyramide régulière, trouver l'angle compris entre deux faces latérales dans les cas suivants :

1° La base est un triangle équilatéral;

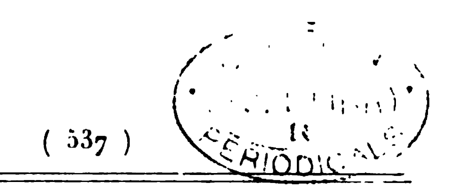
2° Est un hexagone;

3° D'une manière générale, la base est un polygone régulier de n côtés. (A. Geneix-Martin.)

1560. Trouver le rayon d'un cercle passant par les points dont les coordonnées trilinéaires sont $(-a, b, c)$, $(a, -b, c)$, $(a, b, -c)$. (B. Hanumenta-Rau, B. A.)

Extrait du journal anglais : *The Educational Times*.

Note. — M. Giovanni Russo a résolu la question 1538; c'est par oubli que sa solution n'a pas été mentionnée p. 487.



DÉMONSTRATION DIRECTE D'UNE IDENTITÉ.

Dans son *Algèbre*, p. 5, M. de Longchamps donne l'identité suivante

$$\begin{aligned} & x(x+1)\ldots(x+y)+(x+1)\ldots(x+y+1)+\ldots \\ & \quad +(z-y)(z-y+1)\ldots(z-1)z \\ & = \frac{(z+1)z\ldots(z-y)-(x+y)\ldots(x-1)}{y+2}, \end{aligned}$$

et ajoute que *sa vérification directe présente des difficultés*. On lira donc peut-être avec intérêt la suivante, qui n'en présente aucune.

De l'expression

$$\begin{aligned} & (x-1)x(x+1)\ldots(x+y) \\ & \quad +x(x+1)\ldots(x+y+1)+\ldots \\ & \quad +(z-y-1)(z-y)\ldots z+(z-y)\ldots(z+1) \end{aligned}$$

retranchons l'expression même où tous les termes ont avancé d'un rang

$$\begin{aligned} & x(x+1)\ldots(x+y+1) \\ & \quad +(x+1)\ldots(x+y+2)+\ldots \\ & \quad +(z-y)\ldots(z+1)+(x-1)x(x+1)\ldots(x+y), \end{aligned}$$

nous aurons un résultat identiquement nul.

Or, en soustrayant les termes de même rang, on a

$$\begin{aligned} & x(x+1)\ldots(x+y)[x+y+1-x+1] \\ & \quad +(x+1)(x+2)\ldots(x+y+1)[x+y+2-x]+\ldots \\ & \quad +(z-y)\ldots z[z+1-z+y+1] \\ & \quad +(x-1)x\ldots(x+y)-(z-y)\ldots(z+1)=0, \end{aligned}$$

où tous les crochets se réduisent à $y+2$. En divisant par $y+2$, on a donc l'identité proposée. Ch. B.

NOTE SUR L'HERPOLHODIE (1);

Par M. BARBARIN,
Professeur au lycée de Toulon.

Poinsot a démontré que, quand un corps qui n'est soumis à aucune force extérieure tourne autour d'un point fixe, son ellipsoïde d'inertie demeure constamment tangent à un plan invariable. Le point de contact décrit sur l'ellipsoïde une courbe du quatrième ordre, connue sous le nom de *polhodie,* et trace sur le plan fixe une autre courbe, appelée *herpolhodie.* Les propriétés de la première courbe sont bien connues; c'est une courbe fermée entourant sur l'ellipsoïde l'extrémité du plus grand axe ou l'extrémité du plus petit; elle se réduit, par exception, au système de deux ellipses lorsqu'elle passe par le sommet de l'axe moyen, ou aux parallèles de l'ellipsoïde quand celui-ci est de révolution. On sait enfin que la polhodie se projette suivant une ellipse sur le plan du petit axe et du moyen, ainsi que sur le plan du grand axe et du moyen, et suivant une hyperbole sur le plan du grand et du petit axe (*voir,* à ce sujet, le *Traité de Mécanique* de M. Collignon).

Je me propose, dans cette Note, de résumer les propriétés les plus remarquables de l'herpolhodie.

---

(1) Cet article nous a été envoyé par M. Barbarin à la date du 28 janvier 1882, et nous n'avons malheureusement pu le publier plus tôt à cause de nos engagements antérieurs. M. Barbarin n'avait donc aucune connaissance de la Note de M. de Sparre, insérée aux *Comptes rendus* le 24 novembre 1884, lorsqu'il a fait son travail. Ch. B.

I. — Équation de l'herpolhodie.

D'après le théorème de Poinsot, le mouvement est réglé en ce que la polhodie roule sans glisser sur l'herpolhodie. Si donc on désigne par S et σ les arcs des deux courbes décrits dans le même temps, à partir du même instant initial, on a

$$S = \sigma \quad \text{et} \quad dS = d\sigma.$$

Je déterminerai S et σ en fonction des coordonnées polaires ρ, ω de l'herpolhodie sur le plan fixe, le pôle étant pris au pied P de la perpendiculaire menée à ce plan par le centre de l'ellipsoïde. Donc, relativement à cette courbe, on a d'abord

$$d\sigma^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\omega^2.$$

Soit maintenant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

l'ellipsoïde; si je désigne par δ la distance du point fixe o au plan fixe, la polhodie est définie par l'équation précédente et

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{\delta^2}. \tag{2}$$

Je joindrai à ces équations la suivante :

$$x^2 + y^2 + z^2 = \delta^2 + \rho^2. \tag{3}$$

J'écarte d'abord le cas où l'ellipsoïde serait de révolution autour de son grand axe a; alors

$$b = c$$

et

$$\rho^2 = \frac{(a^2 - \delta^2)(\delta^2 - b^2)}{\delta^2};$$

l'herpolhodie est alors un cercle ayant P pour centre.

Il en serait de même si l'ellipsoïde était de révolution autour de son petit axe.

Soit donc

$$a > b > c.$$

En résolvant le système des équations (1), (2), (3) par rapport à x^2, y^2, z^2, je trouve d'abord

$$x^2 = \frac{-a^4(b^2-c^2)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}\left[\rho^2 + \frac{1}{\delta^2}(\delta^2-b^2)(\delta^2-c^2)\right].$$

Je poserai, pour abréger,

$$(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2) = D,$$
$$(\delta^2-a^2)(\delta^2-b^2)(\delta^2-c^2) = u.$$

J'aurai donc simplement

$$(4)\quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{-a^4(b^2-c^2)}{D}\left[\rho^2 + \dfrac{u}{\delta^2(\delta^2-a^2)}\right], \\ y^2 = \dfrac{-b^4(c^2-a^2)}{D}\left[\rho^2 + \dfrac{u}{\delta^2(\delta^2-b^2)}\right], \\ z^2 = \dfrac{-c^4(a^2-b^2)}{D}\left[\rho^2 + \dfrac{u}{\delta^2(\delta^2-c^2)}\right], \end{cases}$$

équations qui peuvent s'écrire sous la forme

$$(4')\quad \begin{cases} x^2 = \alpha(\rho^2 + r_1) \quad \text{avec} \quad \alpha = \dfrac{-a^4(b^2-c^2)}{D}, \quad \ldots, \\ y^2 = \beta(\rho^2 + r_2) \quad\quad » \quad\quad r_1 = \dfrac{u}{\delta^2(\delta^2-a^2)}, \quad \ldots \\ z^2 = \gamma(\rho^2 + r_3), \end{cases}$$

En différentiant ces équations, j'ai

$$x\,dx = \alpha\rho\,d\rho,$$
$$y\,dy = \beta\rho\,d\rho,$$
$$z\,dz = \gamma\rho\,d\rho;$$

donc, pour obtenir l'arc de polhodie en fonction de ρ,

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\alpha^2}{x^2} + \frac{\beta^2}{y^2} + \frac{\gamma^2}{z^2}\right)\rho^2\,d\rho^2,$$
$$= \left(\frac{\alpha}{\rho^2+r_1} + \frac{\beta}{\rho^2+r_2} + \frac{\gamma}{\rho^2+r_3}\right)\rho^2\,d\rho^2;$$

d'où

$$d\rho^2 + \rho^2\, d\omega^2 = \rho^2\, d\rho^2\left(\frac{\alpha}{\rho^2 + r_1} + \frac{\beta}{\rho^2 + r_2} + \frac{\gamma}{\rho^2 + r_3}\right).$$

L'équation différentielle de l'herpolhodie est donc

$$(5)\qquad d\omega = \frac{d\rho}{\rho}\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\rho^2 + r_1} + \frac{\beta}{\rho^2 + r_2} + \frac{\gamma}{\rho^2 + r_3}\right)\rho^2 - 1},$$

et la recherche de cette courbe se trouve ramenée ainsi à une quadrature.

En abordant maintenant les simplifications, on a

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\alpha}{\rho^2 + r_1} + \frac{\beta}{\rho^2 + r_2} + \frac{\gamma}{\rho^2 + r_3}\right)\rho^2 - 1 \\
&= \frac{\left[\begin{array}{c}\alpha(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + r_3) + \beta(\rho^2 + r_3)(\rho^2 + r_1) \\ + \gamma(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2)\end{array}\right]}{(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + r_3)} - 1 \\
&= \frac{\left\{\begin{array}{l}(\alpha + \beta + \gamma - 1)\rho^6 \\ + [\alpha(r_2 + r_3) + \beta(r_3 + r_1) + \gamma(r_1 + r_2) - (r_1 + r_2 + r_3)]\rho^4 \\ + (\alpha r_2 r_3 + \beta r_3 r_1 + \gamma r_1 r_2 - r_2 r_3 - r_3 r_1 - r_1 r_2)\rho^2 - r_1 r_2 r_3\end{array}\right\}}{(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + r_3)}.
\end{aligned}$$

1°
$$\alpha + \beta + \gamma - 1 = 0;$$

2°
$$\left\{\begin{aligned}
&\alpha(r_2 + r_3) + \beta(r_3 + r_1) + \gamma(r_1 + r_2) - (r_1 + r_2 + r_3) \\
&\quad = (\beta + \gamma - 1)r_1 + (\gamma + \alpha - 1)r_2 + (\alpha + \beta - 1)r_3 \\
&\quad = -\alpha r_1 - \beta r_2 - \gamma r_3 = -\delta^2;
\end{aligned}\right.$$

3°
$$\left\{\begin{aligned}
&\alpha r_2 r_3 + \beta r_3 r_1 + \gamma r_1 r_2 - r_2 r_3 - r_3 r_1 - r_1 r_2 \\
&\quad = -(\beta + \gamma)r_2 r_3 - (\gamma + \alpha)r_3 r_1 - (\alpha + \beta)r_1 r_2 \\
&\quad = -\alpha r_1(r_2 + r_3) - \beta r_2(r_3 + r_1) - \gamma r_3(r_1 + r_2);
\end{aligned}\right.$$

or

$$r_2 + r_3 = \frac{u(2\delta^2 - b^2 - c^2)}{\delta^2(\delta^2 - b^2)(\delta^2 - c^2)},$$

donc

$$-\alpha r_1(r_2 + r_3) = \frac{a^4(b^2 - c^2)(2\delta^2 - b^2 - c^2)u}{D\delta^4},$$

de même

$$-\beta r_2(r_3 + r_1) = \frac{b^4(c^2 - a^2)(2\delta^2 - c^2 - a^2)u}{D\delta^4},$$

$$-\gamma r_3(r_1 + r_2) = \frac{c^4(a^2 - b^2)(2\delta^2 - a^2 - b^2)u}{D\delta^4};$$

donc

$$-\alpha r_1(r_2+r_3)-\beta r_2(r_3+r_1)-\gamma r_3(r_1+r_2)=\frac{-2u}{\delta^2}.$$

4°
$$-r_1 r_2 r_3=-\frac{u^2}{\delta^6}.$$

L'équation (5) se transforme et devient finalement

$$(6)\qquad d\omega=\delta\frac{\left(\rho^2+\frac{u}{\delta^4}\right)d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2+r_1)(\rho^2+r_2)(\rho^2+r_3)}}.$$

Le problème dépend donc d'une quadrature elliptique.

II. — Discussion et forme de la courbe.

Cette forme dépend des diverses circonstances que présente l'équation différentielle précédente quand on y fait varier δ depuis c jusqu'à a en passant par la valeur intermédiaire b. Ce sont ces circonstances que nous allons étudier :

1° δ *varie de* c *à* b : *la polhodie entoure le sommet du petit axe.* — Au début, pour $\delta=c$, $r_1=0$, $r_2=0$, $u=0$, $r_3=\frac{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}{c^2}$ et $\rho=0$. L'herpolhodie se réduit à son pôle P ; le corps tourne autour du petit axe de son ellipsoïde, qui demeure fixe. A mesure que δ augmente, la courbe s'élargit progressivement ; alors

$$\delta^2-c^2>0,\quad \delta^2-b^2<0,\quad \delta^2-a^2<0;$$

d'où

$$u>0,\quad r_1<0,\quad r_2<0,\quad r_3>0;$$

le radical, qui est au dénominateur du second membre de l'équation (6), s'annule pour deux valeurs distinctes de ρ

$$\rho_1=\sqrt{-r_1},\quad \rho_2=\sqrt{-r_2}$$

et

$$\rho_2>\rho_1.$$

Du reste, ce radical ne doit pas cesser d'être réel, et, par suite, $(\rho^2+r_1)(\rho^2+r_2)(\rho^2+r_3)$ d'être négatif, ce qui exige $(\rho^2+r_1)(\rho^2+r_2)<0$, puisque $\rho^2+r_3>0$. Donc ρ est compris entre ρ_1 et ρ_2,

$$\rho_1<\rho<\rho_2.$$

La courbe ne possède de points que dans la bande annulaire C_1C_2 formée par les deux cercles concentriques à P et ayant ρ_1, ρ_2 pour rayons; de plus,

$$d(\rho_1^2)=\frac{2(b^2c^2-\delta^4)}{\delta^3},$$

$$d(\rho_2^2)=\frac{2(a^2c^2-\delta^4)}{\delta^3},$$

$$\rho_2^2-\rho_1^2=(a^2-b^2)\left(1-\frac{c^2}{\delta^2}\right),$$

ce qui fait voir que :

1° ρ_1 augmente depuis o jusqu'au maximum $b-c$, quand δ augmente de c à $\sqrt{bc}<b$; puis ρ_1 diminue pour retourner à o quand δ devient égal à b.

2° ρ_2 augmente aussi avec δ depuis o jusqu'au maximum $a-c$, atteint pour $\delta=\sqrt{ac}$. Lorsque $\delta=b$, la valeur de ρ_2 est $\sqrt{\frac{(b^2-c^2)(a^2-b^2)}{b^2}}$.

3° En tout cas, la bande annulaire, d'abord très étroite, s'élargit quand δ augmente, puisque $\rho_2^2-\rho_1^2$ augmente avec δ.

La courbe est tangente aux cercles PC_1, PC_2 qui l'enserrent; car, pour $\rho=\rho_1$ ou $\rho=\rho_2$, $\frac{d\rho}{d\omega}=0$. Les contacts sont périodiques. En effet, l'angle $\widehat{M_1PM_2}$ de deux rayons de contact consécutifs est l'intégrale définie

$$\Omega_1^2=\omega_2-\omega_1=\delta\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{\left(\rho^2+\frac{u}{\delta^4}\right)d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2+r_1)(\rho^2+r_2)(\rho^2+r_3)}},$$

qui a une valeur constante pour une valeur fixe de δ.

Les rayons de contact PM_1, PM_2, ... sont des axes de symétrie de la courbe. En effet, soient, de part et d'autre du point M_2, deux points μ, μ' de la courbe où ρ a la même valeur :

$$\widehat{\mu P M_2} = \omega = \quad \delta \int_{\rho}^{\rho_2} \frac{\left(\rho^2 + \frac{u}{\delta^4}\right) d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + r_3)}},$$

$$\widehat{M_2 P \mu'} = \omega' = -\delta \int_{\rho_2}^{\rho} \frac{\left(\rho^2 + \frac{u}{\delta^4}\right) d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + r_3)}};$$

car, de μ en M_2, $d\rho > 0$, tandis que, de M_2 en μ', $d\rho < 0$; donc

$$\omega' = \omega;$$

donc μ et μ' sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite PM_2. M_1, M_2, ... sont les sommets de la courbe; en chacun d'eux le point de la polhodie qui est sur la courbe fixe appartient aux plans principaux de l'ellipsoïde. Je vais déterminer deux limites de l'angle $\widehat{M_1 P M_2} = \Omega_1^2$ et montrer que cet angle est, en général, $> \frac{\pi}{2}$.

Pour cela, je fais varier continuement ρ de ρ_1 à ρ_2; dans cet intervalle, $\rho^2 + r_3$ augmente continuement de $r_3 - r_1$ à $r_3 - r_2$; d'après un théorème connu, l'intégrale Ω_1^2 est donc comprise entre les limites suivantes :

Limite inférieure :

$$L_1 = \frac{\delta}{\sqrt{r_3 - r_2}} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\left(\rho^2 + \frac{u}{\delta^4}\right) d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2)}} = \frac{\delta}{\sqrt{r_3 - r_2}} P;$$

Limite supérieure :

$$L_2 = \frac{\delta}{\sqrt{r_3 - r_1}} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\left(\rho^2 + \frac{u}{\delta^4}\right) d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2)}} = \frac{\delta}{\sqrt{r_3 - r_1}} P.$$

Je calcule l'intégrale définie P. En posant $\rho^2 = t$, on a

$$\int \frac{\left(\rho^2 + \frac{u}{\delta^4}\right) d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2)}} = \frac{1}{2}\int \frac{\left(t + \frac{u}{\delta^4}\right) dt}{t\sqrt{-(t + r_1)(t + r_2)}}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{-(t + r_1)(t + r_2)}}$$
$$+ \frac{u}{2\delta^4}\int \frac{dt}{t\sqrt{-(t + r_1)(t + r_2)}}.$$

Ces deux intégrales indéfinies se calculent aisément; leur somme est

$$\frac{1}{2} \arc\sin \frac{2t + r_1 + r_2}{r_1 - r_2} + \frac{u}{2\delta^4\sqrt{r_1 r_2}} \arc\sin \frac{-(r_1 + r_2)t - 2r_1 r_2}{t(r_1 - r_2)}$$
$$= \frac{1}{2} \arc\sin \frac{2\rho^2 + r_1 + r_2}{r_1 - r_2} + \frac{u}{2\delta^4\sqrt{r_1 r_2}} \arc\sin \frac{-(r_1 + r_2)\rho^2 - 2r_1 r_2}{\rho^2(r_1 - r_2)};$$

donc la valeur de P est

$$P = \frac{1}{2} \arc\sin \frac{2\rho_2^2 + r_1 + r_2}{r_1 - r_2} + \frac{u}{2\delta^4\sqrt{r_1 r_2}} \arc\sin \frac{-(r_1 + r_2)\rho_2^2 - 2r_1 r_2}{\rho_2^2(r_1 - r_2)}$$
$$- \frac{1}{2} \arc\sin \frac{2\rho_1^2 + r_1 + r_2}{r_1 - r_2} - \frac{u}{2\delta^4\sqrt{r_1 r_2}} \arc\sin \frac{-(r_1 + r_2)\rho_1^2 - 2r_1 r_2}{\rho_1^2(r_1 - r_2)}$$

ou

$$P = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{u}{\delta^4\sqrt{r_1 r_2}}\right);$$

donc

$$L_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{b^2 - c^2}}\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{a^2 - \delta^2}} + \sqrt{b^2 - \delta^2}\right),$$
$$L_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2 - c^2}}\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{b^2 - \delta^2}} + \sqrt{a^2 - \delta^2}\right);$$

pour $\delta = c$, la valeur initiale de L_1 est

$$\frac{c^2 + \sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}}{\sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}} \frac{\pi}{2},$$

quantité supérieure à $\frac{\pi}{2}$, et sa valeur finale est, pour $\delta = b$,

$$\frac{b^2}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}\,\frac{\pi}{2}.$$

Il y a lieu de distinguer, suivant que cette valeur est $\gtreqless \frac{\pi}{2}$:

1° $\frac{b^2}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}} > 1$. La valeur finale de L_1 est $> \frac{\pi}{2}$. Le sens de la variation de L_1 est indiqué par le signe de $\frac{dL_1}{d\delta}$ ou, à un facteur près qui est constamment positif, par le signe du trinôme bicarré

$$(a^2+b^2)\delta^4 - a^2(a^2+4b^2)\delta^2 + (4b^2-a^2)a^4.$$

Ce trinôme a toujours deux racines réelles et distinctes en δ^2, l'une positive et supérieure à b^2, l'autre inférieure. Désignons-la par d_1.

$d_1 \leq c^2$. Le trinôme reste négatif de $\delta = c$ à $\delta = b$. L_1 diminue et, par suite, reste toujours $> \frac{\pi}{2}$. *A fortiori*, il en est de même de Ω_1^2.

$d_1 > c^2$. Le trinôme est positif de $\delta = c$ à $\delta = d_1$, puis devient négatif. L_1 augmente d'abord, pour diminuer ensuite, mais sans cesser d'être $> \frac{\pi}{2}$. Ainsi de Ω_1^2.

2° $\frac{b^2}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}} = 1$. Mêmes conclusions que plus haut.

3° $\frac{b^2}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}} < 1$. Pour les valeurs de δ avoisinant c, L_1 et *a fortiori* Ω_1^2 sont $> \frac{\pi}{2}$; mais, pour les valeurs de δ avoisinant b, L_1 devient $< \frac{\pi}{2}$. On ne peut donc rien conclure au sujet de Ω_1^2. Cependant il est aisé de voir que, quand δ est très proche de b, Ω_1^2 a une très

grande valeur absolue. Dans ce cas, en effet, si l'on désigne par ε, ε_1, ε_3 trois infiniment petits du même ordre, on a

$$\frac{u}{\delta^4} = \varepsilon, \quad r_1 = \varepsilon_1, \quad r_3 = \varepsilon_3,$$

et, par suite,

$$\Omega_1^2 = \delta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{(\rho^2 + \varepsilon)\, d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2 + \varepsilon_1)(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + \varepsilon_3)}}.$$

En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, remarquant que, ε_3 et ε_1 étant de signes contraires, leur somme est négligeable aussi, il reste simplement

$$\Omega_1^2 = \delta \int_{\sqrt{-\varepsilon_1}}^{\rho_2} \frac{(\rho^2 + \varepsilon)\, d\rho}{\rho^3\sqrt{\rho_2^2 - \rho^2}}$$
$$= \delta \int_{\sqrt{-\varepsilon_1}}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho_2^2 - \rho^2}} + \delta\varepsilon \int_{\sqrt{-\varepsilon_1}}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho^3\sqrt{\rho_2^2 - \rho^2}};$$

or

$$\int \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho_2^2 - \rho^2}} = -\frac{1}{\rho_2} \mathcal{L}\left(\frac{\rho_2}{\rho} + \sqrt{\frac{\rho_2^2}{\rho^2} - 1}\right)$$

et, en posant $\frac{\rho_2^2}{\rho^2} = u^2$,

$$\int \frac{d\rho}{\rho^3\sqrt{\rho_2^2 - \rho^2}} = -\frac{1}{\rho_2^3} \int \frac{u^2\, du}{\sqrt{u^2 - 1}}$$
$$= -\frac{1}{\rho_2^3} \int \sqrt{u^2 - 1}\, du - \frac{1}{\rho_2^3} \mathcal{L}(u + \sqrt{u^2 - 1});$$

mais l'intégration par parties donne

$$\int \sqrt{u^2 - 1}\, du = u\sqrt{u^2 - 1} - \int \frac{u^2\, du}{\sqrt{u^2 - 1}};$$

de là résulte

$$\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{u^2 - 1} + \mathcal{L}(u + \sqrt{u^2 - 1})\right]$$

et, par conséquent,

$$\int \frac{d\rho}{\rho^3\sqrt{\rho_2^2-\rho^2}} = -\frac{1}{2\rho_2^3}\left[\frac{\rho^2}{\rho}\sqrt{\frac{\rho_2^2}{\rho^2}-1}+\mathcal{L}\left(\frac{\rho^2}{\rho}+\sqrt{\frac{\rho_2^2}{\rho^2}-1}\right)\right];$$

donc

$$\Omega_1^2 = -\frac{\delta}{\rho_2}\left(1+\frac{\varepsilon}{2\rho_2^2}\right)\mathcal{L}\frac{\rho_2+\sqrt{\rho_2^2-\rho^2}}{\rho}-\frac{\delta\varepsilon}{2\rho_2^2}\frac{\sqrt{\rho_2^2-\rho^2}}{\rho^2},$$

cette intégrale indéfinie étant prise entre les limites $\sqrt{-\varepsilon_1}$ et ρ_2.

Si ε, ε_1 tendent simultanément vers zéro, δ tendant vers b, la limite de Ω_1^2 est infinie.

Donc, en général, quand δ varie de c à b, l'herpolhodie se compose d'une succession de boucles égales dont les sommets se déplacent dans le sens où ω croît.

Fig. 1.

Cette courbe peut se fermer quand le nombre de ses axes est fini, ou que l'angle $\Omega_1^2 = \widehat{M_1PM_2}$ est commensurable avec l'angle droit; dans le cas contraire, elle se prolonge indéfiniment sans revenir au point du départ, et le nombre de ses axes est infini.

2° $\delta = b$: *la polhodie est une ellipse passant par l'axe moyen.* — Dans ce cas,

$$u = 0, \quad r_1 = 0, \quad r_3 = 0, \quad r_2 = \frac{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)}{b^2} = -\rho_2^2.$$

L'équation (6) se simplifie et devient

$$(7) \qquad d\omega = \frac{b\,d\rho}{\rho\sqrt{\rho_2^2 - \rho^2}};$$

d'où

$$\omega = -\frac{b}{\rho_2}\,\mathcal{L}\frac{\rho_2 + \sqrt{\rho_2^2 - \rho^2}}{\rho},$$

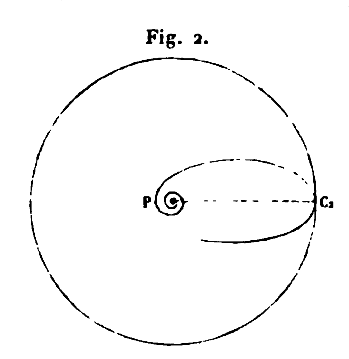
si l'on compte l'arc à partir du moment où $\rho = \rho_2$.

De là, aisément,

$$\rho = \frac{2\rho_2}{e^{\frac{\rho_2\omega}{b}} + e^{-\frac{\rho_2\omega}{b}}}.$$

L'herpolhodie est une spirale tangente au cercle PC_2 pour $\omega = 0$, intérieure à ce cercle et se rapprochant du

Fig. 2.



pôle P, point asymptote autour duquel elle tourne indéfiniment. Quoique ce point ne soit atteint que pour $\omega = \infty$, néanmoins la longueur de la spirale est finie, car elle est égale à celle de l'ellipse polhodie. Supposons le corps placé de telle sorte que l'axe moyen de son

ellipsoïde d'inertie soit dirigé suivant oP. Si, dans cet état, on fait tourner le corps, la rotation persiste indéfiniment autour de oP; mais, si, en provoquant la rotation, on dérange légèrement l'ellipsoïde, l'axe instantané évolue alors un nombre infini de fois autour de oP en s'éloignant jusqu'à ce que son extrémité I, atteignant le sommet de la polhodie qui est dans le plan du grand et du petit axe, vienne se placer sur le plan fixe au point C_2. En vertu de la vitesse acquise, le mouvement se continue, et l'axe instantané, dépassant cette position, recommence à évoluer un nombre infini de fois autour de oP, s'en rapprochant cette fois sur la seconde branche de la courbe. L'axe moyen tend à reprendre son orientation première, mais sa direction s'est totalement renversée; le corps s'est retourné sur lui-même.

3° δ *varie de b à a : la polhodie entoure le sommet du grand axe.* — Dans ce cas,

$$\delta^2 - a^2 < 0, \quad \delta^2 - b^2 > 0, \quad \delta^2 - c^2 > 0;$$

d'où

$$u < 0, \quad r_1 > 0, \quad r_2 < 0, \quad r_3 < 0, \quad \rho_2 > \rho_3.$$

En faisant une analyse analogue à celle qui a déjà été faite quand δ était $< b$, on arrive aux conclusions suivantes :

La courbe demeure comprise dans la bande annulaire formée par les deux cercles concentriques PC_2, PC_3 ayant pour rayons $\rho_2 = \sqrt{-r_2}$ et $\rho_3 = \sqrt{-r_3}$. Elle est alternativement tangente à chacun d'eux, et les rayons de contact sont des axes de symétrie; ρ_3 augmente progressivement de 0 au maximum $a - b$ lorsque δ croît, puis il diminue pour redevenir 0 quand $\delta = a$; ρ_2 part de la valeur $\sqrt{\frac{(b^2 - c^2)(a^2 - b^2)}{b^2}}$, augmentant jusqu'à $a - c$ si $\sqrt{ac} < b$ et diminuant ensuite jusqu'à 0, ou bien diminuant dès le début si $\sqrt{ac} < b$.

Dans tous les cas,

$$\rho_2^2 - \rho_3^2 = (b^2 - c^2)\left(\frac{a^2}{\delta^2} - 1\right);$$

la bande se rétrécit donc à mesure que δ croît.

L'angle $\widehat{M_2PM_3}$ de deux axes de symétrie consécutifs est

$$\Omega_3^2 = \delta \int_{\rho_3}^{\rho_2} \frac{\left(\rho^2 + \frac{u}{\delta^4}\right) d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + r_3)}},$$

et, comme $r_1 + \rho^2$ augmente continuement de $r_1 - r_3$ à $r_1 - r_2$ quand, pour une valeur fixe de δ, on fait augmenter ρ de ρ_3 à ρ_2, cet angle a encore deux limites :

Limite supérieure :

$$L_3 = \frac{\delta}{\sqrt{r_1 - r_3}} \int_{\rho_3}^{\rho_2} \frac{\left(\rho^2 + \frac{u}{\delta^4}\right) d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + r_3)}}$$
$$= \frac{\delta}{\sqrt{r_1 - r_3}}\left(1 + \frac{u}{\delta^4\sqrt{r_2 r_3}}\right)\frac{\pi}{2};$$

Limite inférieure :

$$L_2 = \frac{\delta}{\sqrt{r_1 - r_2}}\left(1 + \frac{u}{\delta^4\sqrt{r_2 r_3}}\right)\frac{\pi}{2}.$$

La valeur initiale de cette dernière est

$$\frac{b^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}\frac{\pi}{2}.$$

La valeur finale est

$$\frac{a^2 + \sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}\frac{\pi}{2},$$

quantité $> \frac{\pi}{2}$.

Du reste, pour les valeurs de δ qui avoisinent b, Ω_2^3 a une valeur absolue très grande, et, comme on a

$$\frac{dL_2}{d\delta} = \frac{\delta}{(\delta^2-b^2)^{\frac{1}{2}}(\delta^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\left[(\delta^2-2c^2)\sqrt{\delta^2-b^2}+(\delta^2-c^2)^{\frac{3}{2}}\right],$$

quantité toujours positive quand δ croît de b à a, la limite inférieure L_2 ne cesse d'augmenter, et, par suite, Ω_2^3 est, en général, plus grand que $\frac{\pi}{2}$. La forme de la courbe demeure sensiblement celle de la *fig.* 1. Enfin, pour $\delta = a$, la polhodie se réduit au sommet du grand axe, et l'herpolhodie au point P.

III. — Mouvement sur l'herpolhodie.

Pour achever la question, il reste à étudier la vitesse du roulement des deux courbes l'une sur l'autre. Si l'on se reporte aux équations d'Euler et à l'analyse de Poinsot, on voit que les coordonnées x, y, z du point de contact des deux courbes par rapport aux axes de l'ellipsoïde sont

$$x = \frac{p}{\sqrt{H}},\quad y = \frac{q}{\sqrt{H}},\quad z = \frac{r}{\sqrt{H}},$$

p, q, r, H ayant les désignations que l'on sait, et que, par conséquent, la première des équations du mouvement peut s'écrire

$$(8)\qquad \frac{1}{a^2}\frac{dx}{dt} + \left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)yz\sqrt{H} = 0;$$

d'où, en tenant compte des équations (4′) et en choisissant convenablement les signes des radicaux,

$$(9)\qquad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\sqrt{H}}{\rho}\sqrt{-(\rho^2+r_1)(\rho^2+r_2)(\rho^2+r_3)};$$

de là résulte aussi

$$(10)\qquad \frac{d\omega}{dt} = \delta\sqrt{H}\left(1 + \frac{u}{\rho^2\delta^4}\right);$$

la vitesse du point coïncidant sur la courbe fixe est donc

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} v^2 &= \frac{H}{\rho^2}\left[-(\rho^2+r_1)(\rho^2+r_2)(\rho^2+r_3) + \delta^2\left(\rho^2+\frac{u}{\delta^4}\right)^2\right] \\ &= -\frac{H}{\rho^2}\Big[\alpha(\rho^2+r_2)(\rho^2+r_3) \\ &\qquad + \beta(\rho^2+r_3)(\rho^2+r_1)+\gamma(\rho^2+r_1)(\rho^2+r_2)\Big]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on se reporte à la *fig.* 1, en y suivant le mouvement continu du point coïncidant de M_1 en M_2, $\frac{d\omega}{dt}$ diminue constamment de $\delta\sqrt{H}\left(1+\frac{u}{\rho_1^2\delta^4}\right)$ à $\delta\sqrt{H}\left(1+\frac{u}{\rho_2^2\delta^4}\right)$, puis augmente de nouveau en oscillant périodiquement entre ces limites; ω augmente et diminue plus vite au voisinage du cercle C_1 qu'au voisinage du cercle C_2.

En dérivant, par rapport à ρ, les deux membres de l'équation (11), on a

$$\begin{aligned} \frac{dv^2}{d\rho} &= H\,\frac{\left\{\begin{aligned} &\rho^2\left\{\begin{aligned} &-2\rho[3\rho^4+2(r_1+r_2+r_3)\rho^2+r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1] \\ &\qquad + 4\delta^2\rho\left(\rho^2+\frac{u}{\delta^4}\right)\end{aligned}\right\} \\ &-2\rho\left[-(\rho^2+r_1)(\rho^2+r_2)(\rho^2+r_3)+\delta^2\left(\rho^2+\frac{u}{\delta^4}\right)^2\right]\end{aligned}\right\}}{\rho^4} \\ &= 2H\,\frac{-2\rho^6-(r_1+r_2+r_3-\delta^2)\rho^4+r_1r_2r_3-\frac{u^2}{\delta^6}}{\rho^3}; \end{aligned}$$

mais on a vu que $r_1r_2r_3 = \frac{u^2}{\delta^6}$; donc

$$\frac{dv^2}{d\rho} = -2H\rho[2\rho^2+(r_1+r_2+r_3-\delta^2)].$$

Pour $\rho = \rho_1$,

$$\frac{dv^2}{d\rho} = -2H\rho_1(-r_1 + r_2 + r_3 - \delta^2);$$

pour $\rho = \rho_2$,

$$\frac{dv^2}{d\rho} = -2H\rho_2(r_1 - r_2 + r_3 - \delta^2);$$

mais

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 - \delta^2 \\ &= \frac{(\delta^2 - a^2)(\delta^2 - b^2) + (\delta^2 - b^2)(\delta^2 - c^2) + (\delta^2 - c^2)(\delta^2 - a^2) - \delta^4}{\delta^2} \\ &= \frac{2\delta^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)\delta^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{\delta^2}. \end{aligned}$$

Le numérateur de cette fraction a deux racines réelles, l'une toujours $> a^2$.

1° Si $c^2 \geq \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$, l'autre racine qui est positive est moindre que c^2. Dans ce cas, $r_1 + r_2 + r_3 - \delta^2$ est toujours négatif quand δ varie de c à b; $\frac{dv^2}{d\rho}$ s'annule, par conséquent, et change de signe pour une certaine valeur de ρ; mais, dans ce cas, $r_3 - \delta^2 < 0$ et $r_2 - r_1 < 0$: donc la valeur initiale de $\frac{dv^2}{d\rho}$ est positive; par conséquent, la vitesse du point coïncident augmente à partir du point M_1; mais, suivant les cas, entre M_1 et M_2, elle peut croître continuement ou atteindre un maximum.

2° Si $c^2 < \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$, la deuxième racine est supérieure à c^2; mais alors, à plus forte raison, $b^2 > \frac{a^2c^2}{a^2+c^2}$, et cette même racine est inférieure à b^2. Désignons-la par δ_1^2.

Quand δ varie de c à δ_1, $r_1 + r_2 + r_3 - \delta^2$ est positif: donc $\frac{dv^2}{d\rho}$ commence par être négatif, et, par conséquent,

v^2 commence par diminuer et diminue sans cesse de M_1 à M_2.

Si $\delta = \delta_1$, $\frac{dv^2}{d\rho}$ est encore négatif, et v diminue constamment.

Enfin, quand δ s'élève au-dessus de δ_1, $r_1 + r_2 + r_3 - \delta^2$ devient négatif, et v^2 commence par augmenter à partir de M_1 comme dans la première circonstance.

L'équation (9) donne

$$dt = \frac{1}{\sqrt{H}} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{-(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + r_3)}},$$

donc le temps T_1^2 employé à décrire l'arc $M_1 M_2$ est

$$T_1^2 = \frac{1}{\sqrt{H}} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{-(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + r_3)}};$$

il est aussi compris entre les deux limites

Limite supérieure...... $\frac{\delta}{\sqrt{H}} \frac{\pi}{2\sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - \delta^2)}}$,

Limite inférieure...... $\frac{\delta}{\sqrt{H}} \frac{\pi}{2\sqrt{(b^2 - c^2)(a^2 - \delta^2)}}$.

Les arcs symétriques μM_2, $M_2 \mu'$ sont décrits dans le même temps, et, par conséquent, aux points μ, μ' les vitesses sont égales, symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe PM_2, mais orientées inversement.

Mêmes conclusions quand δ varie de b à c.

Enfin, pour $\delta = b$, on a

$$\omega = \delta\sqrt{H}\, t,$$

$$\rho = \frac{2\rho_2}{e^{\rho_2\sqrt{H}\, t} + e^{-\rho_2\sqrt{H}\, t}};$$

l'angle ω croît proportionnellement au temps, et le mouvement, qui tend, comme on l'a démontré plus haut, à renverser complètement le corps, demande un temps in-

fini pour s'achever. On a alors

$$v^2 = H\rho^2(b^2+\rho_2^2-\rho^2) = H\rho^2\left[\frac{(a^2+c^2)b^2-a^2c^2}{b^2}-\rho^2\right];$$

donc, pour $\rho = \rho_2$,

$$v = b\rho_2\sqrt{H};$$

à partir de cette valeur, v diminue continuement si $b^2 \geq \rho_2^2$ et atteint, au bout d'un temps infini, sa valeur finale o. Le mouvement se ralentit à mesure que l'axe instantané se rapproche de oP.

Si $b^2 < \rho_2^2$, la vitesse augmente jusqu'à ce que

$$\rho^2 = \frac{b^2+\rho_2^2}{2}$$

et atteint, à ce moment, le maximum donné par

$$v^2 = H\frac{(b^2+\rho_2^2)^2}{4},$$

puis diminue constamment jusqu'à zéro.

QUESTIONS PROPOSÉES PAR M. E. CESARO
[SUITE (1)].

28. Dans tout triangle, de périmètre donné, il y a 23 à parier contre 4 qu'il existe une médiane, et une seule, moindre que le quart du périmètre. S'il n'y a pas une médiane moindre que le quart du périmètre, il y en a deux, ou bien il n'y en a pas, et ces deux cas sont également possibles, c'est-à-dire que l'on peut, pour chacun d'eux, parier 2 contre 23.

(1) *Voir* même Tome, p. 448.

29. Dans un triangle de périmètre donné :

1° On ne doit jamais parier plus de 6 contre 1 qu'un seul des côtés est moindre qu'une certaine fraction du périmètre. On peut faire le pari maximum quand cette fraction est $\frac{2}{7}$.

2° On ne doit jamais parier plus de 7 contre 6 que deux côtés, ni plus ni moins, sont moindres qu'une certaine fraction du périmètre. On peut faire le pari maximum quand cette fraction est $\frac{5}{13}$.

30. Ayant brisé une barre en trois morceaux :

1° On ne doit jamais parier plus de 3 contre 2 qu'un de ces morceaux, et un seul, est moindre qu'une certaine fraction de la barre. On peut faire le pari maximum quand cette fraction est $\frac{1}{5}$.

2° On ne doit jamais parier plus de 6 contre 1 que deux morceaux, et deux seulement, sont moindres qu'une certaine fraction de la barre. On peut faire le pari maximum quand cette fraction est $\frac{3}{7}$.

31. La moyenne géométrique de deux quantités quelconques est égale, en moyenne, aux $\frac{8}{9}$ de leur moyenne arithmétique.

32. 1° L'équation

$$\left(\int_0^s s\,dx\right)^2 + \left(\int_0^s s\,dy\right)^2 = \frac{\theta}{4}\,s^4 \tag{1}$$

ne représente des lignes réelles que si θ est une fraction proprement dite.

2° Si $\theta = \cos^2\varphi$, l'équation (1) représente les spirales logarithmiques, qui rencontrent leurs rayons vecteurs sous un angle V, tel que

$$\tang V = 2 \tang \varphi. \tag{2}$$

3° Donner l'interprétation géométrique des équations (1) et (2).

33. Sur les côtés d'un triangle ABC on prend trois points A', B', C', tels que les droites AA', BB', CC' concourent en un même point. Démontrer que le rapport des aires des triangles A'B'C', ABC, toujours compris entre o et $\frac{1}{4}$, a pour valeur moyenne

$$\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} = 0,1168\ldots.$$

34. Le rapport de l'aire d'un triangle à l'aire du cercle isopérimètre est égal, en moyenne, à

$$\frac{4\pi^2}{105} = 0,3758\ldots.$$

Remarque. — Le rapport en question est toujours compris entre o et

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0,6046\ldots.$$

35. Si $\varphi_K(x)$ est le nombre des fractions irréductibles, de numérateur x, supérieures à K, on a

$$\varphi_K(a) + \varphi_K(b) + \varphi_K(c) + \ldots = \left[\frac{n}{K}\right],$$

a, b, c, ... étant tous les diviseurs de n.

36. La probabilité que, dans la division de la racine carrée du plus grand diviseur carré d'un nombre, pris au hasard, par un nombre fixe α, on obtienne, par excès ou par défaut, le reste r, est

$$\frac{5}{\alpha^2 \sin^2 \frac{\pi r}{\alpha}}.$$

37. Les probabilités que le plus grand diviseur carré d'un nombre, pris au hasard, se termine par 0 ou 5, ou par 4 ou 6, ou par 1 ou 9, sont respectivement

$$\frac{1}{25}, \frac{6}{25}, \frac{18}{25}.$$

38. Il y a 7 à parier contre 3 que la racine du plus grand diviseur d'un nombre, pris au hasard, est composée d'un nombre *pair*, plutôt que d'un nombre *impair* de facteurs premiers, égaux ou inégaux.

39. La probabilité que, dans une division quelconque, le $m^{\text{ième}}$ chiffre décimal soit r, est

$$\frac{1}{20} + \frac{10^m}{2} \int_0^1 \frac{1-x}{1-x^{10}} x^{10^m - 1 +} \; dx.$$

40. Dans toute division, le moyen rapport du plus petit reste au diviseur est

$$\frac{1}{8} + \log \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 0,245782\ldots.$$

41. Dans toute division, le dernier chiffre du quotient est moyennement égal au logarithme naturel de $\sqrt{10}$.

42. On partage n, de toutes les manières possibles, en parties égales à 1, p, ou $p+1$. Ces partitions étant rangées en deux classes, suivant que le nombre des parties est *pair* ou *impair*, démontrer que la différence entre les nombres des partitions des deux classes surpasse de 1 le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{p}$, lorsque p est *impair*.

43. Soit N_p le nombre des solutions *entières* et *po-*

sitives des équations *simultanées*

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_\nu y_\nu = n, \quad x_1x_2\ldots x_\nu = p.$$

L'expression

$$N_1 - N_2 - N_3 + N_4 - N_5 + N_6 - N_7 - N_8 + N_9 + \ldots$$

égale *le nombre des décompositions de n en une somme de ν carrés.*

N.-B. — Chaque N_p a été affecté du signe + ou du signe —, suivant que p est décomposable en un nombre *pair* ou un nombre *impair* de facteurs premiers, égaux ou inégaux.

44. Soit Δ_n un déterminant de $(n-1)^2$ éléments, dans lequel l'élément général u_{ij} est égal à la *somme des carrés des diviseurs communs de $i+1$ et $j+1$*. Démontrer que, lorsque n augmente indéfiniment,

$$\lim \frac{e^n \Delta_n}{n^{2n+1}} = \frac{30}{\pi}.$$

45. n et ν étant deux nombres entiers, démontrer que la somme des plus grands nombres entiers contenus dans les quantités

$$nx,\ n\left(x+\frac{1}{\nu}\right),\ n\left(x+\frac{2}{\nu}\right),\ \ldots,\ n\left(x+\frac{\nu-1}{\nu}\right)$$

est égale à la somme des plus grands nombres entiers contenus dans les quantités

$$\nu x,\ \nu\left(x+\frac{1}{n}\right),\ \nu\left(x+\frac{2}{n}\right),\ \ldots,\ \nu\left(x+\frac{n-1}{n}\right).$$

46. La somme des inverses des termes de la série de Lamé n'atteint pas 2,36.

47. 1° Les pôles d'une droite D, par rapport à une série de coniques homofocales, se trouvent sur la perpendiculaire à la droite, élevée au point où celle-ci est touchée par une des coniques.

2° Les points de contact des tangentes aux coniques, parallèles à D, se trouvent sur une hyperbole équilatère, concentrique avec les coniques, passant par les foyers et ayant une asymptote parallèle à D.

3° Lorsque D change de direction, les sommets et les foyers de l'hyperbole décrivent des lemniscates de Bernoulli.

48. On a

$$1^p x + 2^p x^2 + 3^p x^3 + \ldots + n^p x^n = a^p - x^{n+1}(a+n+1)^p,$$

à condition de remplacer chaque puissance a^k par le coefficient de $\frac{\alpha^k}{1.2.3\ldots k}$ dans le développement de $\frac{1}{1-e^{\alpha}x}$.

49. Si p est premier avec n et $n-1$, et si $p-1$ est premier avec $n-1$, $C_{n,p}$ est divisible par $n(n-1)$.

50. Démontrer que l'équation

$$x^m + \frac{m^k}{1} x^{m-1} + \frac{m^k(m-1)^k}{1.2} x^{m-2} + \ldots = 0$$

a toutes ses racines réelles.

51. Soit

$$u_i = \frac{x^{i-1}}{1-x^i}.$$

Démontrer l'identité

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = u_1^2 - u_1 u_2^2 + u_1 u_2 u_3^2 - u_1 u_2 u_3 u_4^2 + \ldots.$$

52. Soient respectivement A_p, B_p les coefficients de

x^p dans les développements de la fonction

$$(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots$$

et de son inverse. Démontrer la formule

$$a^p+b^p+c^p+\ldots=B_1A_{p-1}+2B_2A_{p-2}+\ldots+pB_p.$$

53. Démontrer l'identité

$$\sum_1^{\infty}\frac{x^i}{(1+x^i)^2}=\sum_1^{\infty}\frac{\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1-x^2}+\ldots+\dfrac{1}{1-x^i}}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^i)}\,\frac{x^{\frac{i(i+1)}{2}}}{1-x^i}.$$

54. La somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation

$$f(\alpha)x^n+\frac{f'(\alpha)}{1}x^{n-1}+\frac{f''(\alpha)}{1.2}x^{n-2}+\ldots=0$$

est égale à

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots p}\,\frac{d^p}{d\alpha^p}\log f(\alpha),$$

pourvu que p ne surpasse pas n.

55. Si les coefficients de l'équation

$$x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_m=0$$

satisfont aux relations

$$A_p^2=2\sum_{i=1}^{i=p}(-1)^{i-1}A_{p-i}A_{p+i}\qquad\left(1\,\overline{\gtrless}\,p\,\overline{\gtrless}\,\frac{m}{2}\right),$$

la somme des puissances $2p^{\text{ièmes}}$, $(\overline{\gtrless}\,m)$, de ses racines est nulle, tandis que la somme des puissances $(2p-1)^{\text{ièmes}}$, $(\overline{\gtrless}\,m)$ est représentée par

$$\sum_{i=1}^{i=p}(-1)^{p+i-1}(2i-1)A_{p-i}A_{p+i-1}.$$

56. On calcule une double série de fonctions, d'après la loi

$$\varepsilon_{n,i} = 1 - x^{1+i}\varepsilon_{n-1,1} + x^{3+2i}\varepsilon_{n-1,2} - x^{6+3i}\varepsilon_{n-1,3} + \ldots,$$

avec les conditions initiales $\varepsilon_{1,i} = 1$. Démontrer que la somme

$$1 - \frac{x}{1-x}\varepsilon_{n,1} + \frac{x}{1-x}\,\frac{x^2}{1-x^2}\varepsilon_{n,2}$$
$$- \frac{x}{1-x}\,\frac{x^2}{1-x^2}\,\frac{x^3}{1-x^3}\varepsilon_{n,3} + \ldots$$

est identique avec la $n^{\text{ième}}$ puissance de

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots.$$

57. On a une suite de fonctions arithmétiques

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,$$

liées par les égalités

$$f_i(x) - f_{i-1}(x) = f_i(x-i+1).$$

La première fonction, généralement nulle, est $(-1)^{i+1}$ lorsque x a la forme $\frac{3i^2 \pm i}{2}$. Démontrer que *la somme*

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots$$

est égale au nombre des diviseurs de x. [On suppose $f_i(x) = 0$, lorsque i surpasse x.]

58. Soit E_p le $p^{\text{ième}}$ *nombre d'Euler*. Démontrer que les sommes, dont les termes généraux sont

$$\frac{E_{2n}}{(2n+1)!}\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x^{2n+1}}{2}\right),\quad \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n+1)!}\operatorname{arctang} e^{x^{2n+1}}$$

(n variant de o à $= +\infty$), ne diffèrent que par une constante.

59. Les seuls nombres entiers qui diffèrent de *cinq* unités, et dont la somme des carrés soit un cube, sont 47 et 52.

60. Si la différence de deux entiers est un nombre *premier,* la somme de leurs carrés n'est pas une cinquième puissance.

61. Si p est un nombre *premier,* de la forme $18\mu \pm 7$, l'équation

$$x^2 + (x+p)^2 = y^3$$

est impossible en nombres entiers.

62. Soit B_m le $m^{\text{ième}}$ *nombre de Bernoulli,* et P_m le $m^{\text{ième}}$ *polynôme de Catalan,* c'est-à-dire

$$P_m(x) = (1-x)^{m+1}\,[(1^m + 2^m x + 3^m x^2 + \ldots)];$$

démontrer la relation symbolique

$$[(1-x)\,B + P]^m - [(1-x)\,B]^m = m\,P^{m-1}.$$

63. Soit

$$Q_n(x) = (1-qx)(1-q^2x)(1-q^3x)\ldots(1-q^nx).$$

Démontrer l'identité

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{n-1}x^n\,Q_{\infty}(x^n)}{Q_{n-1}(1)} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\pm q^{\frac{n(n-1)}{2}}\,x^n}{Q_{n-1}(1)\,Q_{\ }(x^n)}.$$

64. Ayant posé

$$s_p = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p,$$

démontrer la relation

$$s_1\,\Delta^n(0^{n+p-1}) + s_2\,\Delta^n(0^{n+p-2}) + s_3\,\Delta^n(0^{n+p-3}) + \ldots = p\,\Delta^n(0^{n+p}).$$

65. Soit $u_p = 1 + \frac{p}{n}$. Démontrer que, pour n infini,

$$\lim \sqrt[n]{u_1^{u_1} u_2^{u_2} u_3^{u_3} \ldots u_n^{u_n}} = 4\, e^{-\frac{3}{4}}.$$

66. Démontrer aussi que

$$\lim \sqrt[n]{u_1^{u_1^2} u_2^{u_2^2} u_3^{u_3^2} \ldots u_n^{u_n^2}} = 4^{\frac{4}{3}} e^{-\frac{7}{9}}.$$

67. Soit

$$s_n = \frac{1}{(n^2+1)^p} + \frac{1}{(n^2+4)^p} + \frac{1}{(n^2+9)^p} + \ldots.$$

Démontrer que, lorsque p tend vers l'unité, le produit

$$(p-1)(s_1 + s_2 + s_3 + \ldots)$$

tend vers $\frac{\pi}{4}$.

BIBLIOGRAPHIE.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE MÉCANIQUE CÉLESTE, par M. *H. Resal*, membre de l'Institut. 2ᵉ édition, Paris, Gauthier-Villars; 1884. In-4° de 460 pages. Prix : 25ᶠʳ.

Dans cette édition, comme dans celle qui l'a précédée, nous nous sommes proposé d'exposer les principes fondamentaux de la Mécanique céleste, en ayant recours à des démonstrations assez simples pour qu'elles puissent être adoptées dans l'enseignement des Facultés.

Pour déblayer le terrain et en même temps pour faciliter la lecture du texte proprement dit, nous avons cru devoir placer en tête de l'Ouvrage une Introduction où se trouvent traitées, d'une manière spéciale, la plupart des questions de Mécanique analytique et d'Analyse qui doivent ultérieurement se présenter,

et parmi lesquelles nous signalerons les suivantes : dans le Titre I, nous avons donné les équations de la Mécanique analytique, dues à Lagrange, Hamilton et Jacobi, suivies de celles auxquelles conduit la méthode de la variation des constantes arbitraires. Le Titre II se rapporte à l'emploi des coordonnées elliptiques dans la solution de certains problèmes relatifs au mouvement d'un point matériel dans un plan.

Dans le Titre III, nous avons reproduit les intégrales connues des équations du mouvement relatif, par rapport à l'un de ses points, d'un système matériel uniquement soumis à ses actions mutuelles.

Nous avons eu pour objet, dans le Titre IV, d'établir les équations du mouvement dans l'espace d'un point matériel, exprimées en coordonnées polaires, équations auxquelles on doit avoir recours dans la théorie de la Lune. Le Titre V et dernier de l'Introduction renferme les solutions de quelques questions d'Analyse dont les énoncés ne peuvent pas être traduits en langage ordinaire et pour lesquels nous renverrons à la Table des matières.

Nous arrivons maintenant à la partie essentielle de l'Ouvrage.

Dans le Chapitre I, nous nous sommes occupé du mouvement elliptique des planètes, de la gravitation, de la détermination des masses, de la formule de Lambert et de ses conséquences dans le mouvement parabolique des comètes; de la détermination des constantes introduites dans les formules du mouvement elliptique et notamment par la méthode de Gauss, qui n'est mentionnée ni dans la *Mécanique céleste* de Laplace, ni dans l'*Exposition analytique du système du monde* de Pontécoulant; des développements en séries des coordonnées d'une planète suivant les puissances ascendantes du temps et de leurs applications, ainsi que de la détermination des éléments d'une orbite cométaire. Comme première innovation apportée au programme de la première édition, nous avons terminé le Chapitre dont il s'agit en nous occupant du problème du mouvement plan d'un point matériel attiré par deux centres fixes en raison inverse du carré de la distance; ce problème, posé par Euler, a été complètement résolu par Legendre, puis par Liouville, dont nous avons reproduit la démonstration, en raison de sa simplicité.

Le Chapitre II est consacré entièrement à la théorie des perturbations. Nous avons pensé que, pour bien faire comprendre le sens du problème que l'on a en vue, il convenait de faire précéder les recherches analytiques de la théorie géométrique des perturbations, dont l'idée première est due à Newton et qui a été reprise plus tard par Lagrange, dans l'hypothèse où les planètes circuleraient dans le plan de l'écliptique. Dans cette seconde innovation, nous avons eu uniquement recours aux propriétés de l'accélération, qui, comme on le sait, n'ont été établies que vers le commencement de la seconde moitié de notre siècle. Nous avons déduit très facilement, des résultats obtenus, les formules de Poisson qui s'appliquent au mouvement d'une planète dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. Nous avons exposé ensuite la théorie analytique des perturbations des planètes, en prenant pour point de départ les théorèmes d'Hamilton et de Jacobi, méthode qui est beaucoup plus simple que celle de Lagrange, lorsqu'on s'est bien assimilé les matières contenues dans l'Introduction. Nous avons terminé le Chapitre en donnant les formules qui se rapportent aux perturbations du mouvement elliptique des comètes.

Dans le calcul de l'attraction des corps, qui fait l'objet du Chapitre III, nous avons reproduit, à quelques modifications près, les démonstrations géométriques que nous avions données dans la première édition, en vue d'apporter quelque clarté sur cette partie de la Mécanique céleste. Nous avons continué à démontrer *a priori*, au moyen d'une double intégration par parties, la convergence du développement du potentiel en fonctions sphériques dans les cas douteux auxquels Laplace ne s'est pas arrêté. Nous avons employé, pour déterminer la forme de ces fonctions, la méthode de Jacobi, à laquelle nous avons donné plus de développements, et qui est l'une des plus élégantes et des plus simples.

Parmi les questions traitées dans le Chapitre IV, relatif à la figure des planètes, nous citerons celle de l'ellipsoïde à trois axes inégaux de Jacobi, la discussion des équations qui en résultent, établie d'abord par Meyer, puis modifiée et complétée par Liouville; les hypothèses de Legendre et de E. Roche sur la variation de la densité dans l'intérieur de la Terre; le théorème de Liouville sur la stabilité de l'équilibre d'une masse

fluide animée d'un mouvement de rotation, théorème dont nous avons donné une démonstration géométrique et que nous avons ensuite appliqué à la stabilité de l'équilibre des mers.

Nous avons déduit (Chap. V), de considérations géométriques sur le mouvement d'un point, les propriétés, dues à Laplace, des lignes géodésiques tracées sur la surface d'un sphéroïde.

Dans le Chapitre VI, où nous nous occupons des atmosphères des corps célestes, nous avons notamment emprunté à E. Roche les considérations qui, en tenant compte de l'hypothèse de la force répulsive due aux radiations calorifiques, imaginée par M. Faye, permettent d'expliquer la forme des comètes.

En tête du Chapitre VII, intitulé *Des oscillations de la mer et de l'atmosphère*, nous avons établi immédiatement les équations des petits mouvements d'un fluide recouvrant un noyau sphéroïdal, en nous appuyant uniquement sur le théorème de Coriolis dans le mouvement relatif, et sur le principe de l'indépendance des forces centrifuges composées avec les mouvements composants. Nous sommes parvenu à établir la formule pratique relative aux marées, donnée par l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, formule qui paraît être due à Poisson, mais dont nous n'avons trouvé nulle part la démonstration.

Une interprétation géométrique des propriétés du mouvement d'un solide autour d'un point fixe nous a permis de poser presque immédiatement les équations du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité (Chap. VIII). En ce qui concerne les déplacements séculaires de la Terre, nous avions, dans la première édition, pris pour origine du temps l'année 1750; mais ici nous partons de l'année 1850, et nous mettons à profit les chiffres obtenus par Le Verrier en discutant les résultats des observations de Peters. Une simple considération géométrique basée sur la théorie des mouvements relatifs nous a permis d'établir facilement ce théorème de Laplace : *Les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation sont absolument les mêmes que si la mer et l'atmosphère formaient une masse solide avec le sphéroïde qu'elles recouvrent.*

Les équations du mouvement de la Lune et de l'anneau de Saturne, comme celles qui se rapportent à la Terre, ont aussi été déduites de considérations géométriques.

La publication de notre Ouvrage sur la *Physique mathématique* nous a dispensé de reproduire, dans le Chapitre IX, relatif à la chaleur terrestre, les développements sur le mouvement de la chaleur dans une sphère et sur la chaleur centrale du globe, que nous avions donnés dans la première édition; nous n'avons eu dès lors, à quelques préliminaires près, à nous occuper que de la diminution de la durée du jour due au refroidissement de la Terre.

Nous avons ajouté au programme que nous avions adopté dans la première édition, et d'après Laplace dont nous nous sommes efforcé de simplifier les démonstrations :

1° La théorie des réfractions astronomiques;

2° La théorie des inégalités du mouvement des planètes dues à l'ellipticité du Soleil, avec son application à Mercure;

3° Enfin, pour terminer, les principes fondamentaux de la théorie de la Lune, en suivant la voie tracée par Laplace.

H. R.

La Thermodynamique et ses principales applications; par M. *J. Moutier*, examinateur à l'École Polytechnique. Paris, Gauthier-Villars; 1885. In-8° de 568 pages. Prix : 12 fr.

Dans un petit écrit, publié en 1872 sous le titre d'*Éléments de Thermodynamique*, j'avais essayé de résumer les principes de la Théorie mécanique de la chaleur et de réunir les formules les plus importantes, dans le but de répandre l'usage d'une science qui intéresse à la fois l'étude des phénomènes naturels et l'art de l'ingénieur.

Depuis une douzaine d'années, le champ de la Thermodynamique s'est beaucoup agrandi; les applications sont devenues plus nombreuses. Le fleuve qui porte les idées nouvelles a élargi son cours et s'est infiltré peu à peu dans les terres voisines; les riverains s'émeuvent à la vue de cette crue progressive et s'inquiètent de la marche des eaux.

Si l'influence de la Théorie des effets mécaniques de la chaleur sur les progrès de la Physique générale et des sciences voisines ne peut être contestée aujourd'hui, il faut reconnaître cependant que les principes fondamentaux de cette théorie sont encore peu répandus, et que les applications de la théorie sont encore peu connues en dehors d'un milieu trop restreint.

La notion de l'équivalent mécanique de la chaleur est à peu près la seule qui ait fait son chemin : elle doit ce succès à la simplicité de son principe.

Le retard qu'éprouve l'expansion de la Thermodynamique doit être attribué à la forme même sous laquelle la théorie est ordinairement présentée. L'appareil mathématique des Traités didactiques et des Mémoires spéciaux inspire une sorte d'effroi, qui éloigne de la Théorie de la chaleur et fait le vide autour d'elle. Cette crainte doit disparaître; chaque jour amène de nouveaux rapprochements entre la chaleur et les sciences voisines; les applications se multiplient et les liens se resserrent d'une façon plus étroite. Si l'on veut rendre l'alliance plus solide, il faut songer à baisser les barrières et à ouvrir les portes aux regards qui veulent lire derrière les formules.

Il n'est personne qui s'occupe de Thermodynamique à qui l'on n'ait posé souvent les questions suivantes :

Qu'est-ce que la Thermodynamique?
Quel est son but?
Quelle est son utilité?
Quelles sont ses principales applications?

Ce Livre a été composé pour essayer de répondre à ces questions. J. M.

Leçons de Géométrie analytique, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales, par M. *E. Pruvost,* inspecteur général de l'Instruction publique, ancien professeur au Lycée Louis-le-Grand. Paris, Paul Dupont; 1885. Grand in-8° de 352 pages. Prix : 7fr.

Le deuxième fascicule annoncé ici renferme l'étude des courbes du second degré sur les équations réduites, les propriétés générales des courbes du second degré, les pôles et les polaires, les figures polaires réciproques, les théorèmes de Pascal et de Brianchon, l'intersection de deux coniques, des notions sur les coordonnées homogènes, la méthode des projections et les coordonnées polaires.

Le troisième fascicule est sous presse.

COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES : IIe Partie, GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS, et IIIe Partie, GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS ; par M. *G. de Longchamps*, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne. Paris, Delagrave ; 1885. In-8° de 396 pages et de 410 pages. Prix : 5fr et 7fr,50.

Le second fascicule de la IIe Partie annoncé ici renferme la classification des coniques, la réduction de l'équation générale du second degré, les invariants, l'équation générale des coniques, les foyers et les directrices, les théorèmes généraux sur les coniques, l'intersection de deux coniques, l'étude des coniques d'après les équations réduites, la construction des coniques, la construction des courbes, les coordonnées polaires, les sections planes du cône et du cylindre, la construction graphique des racines d'une équation donnée.

La IIIe Partie renferme les coordonnées et les premières formules, la transformation des coordonnées, la ligne droite et le plan, les droites et plans perpendiculaires, la sphère, les enveloppes, la génération des surfaces, le centre, la première classification des quadriques, la division des quadriques en genres, la réduction en axes obliques, les génératrices rectilignes, le cône asymptote, les plans diamétraux, les diamètres, plans, droites et points conjugués, l'étude algébrique de l'équation en S, les plans principaux, les plans cycliques, les invariants, l'intersection de deux quadriques, l'homothétie et la similitude, les théorèmes d'Apollonius, l'étude de l'ellipsoïde, les focales, les hyperboloïdes, les génératrices rectilignes, les paraboloïdes, la génération et la discussion des quadriques.

COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES : Ire Partie, SUPPLÉMENT ; par M. *G. de Longchamps*. Paris, Delagrave ; 1885. In-8° de 173 pages. Prix : 3fr.

Ce Supplément renferme les séries, les infiniment petits, la notion de l'intégrale définie, les quadratures, les différences finies et l'interpolation.

COURS DE TRIGONOMÉTRIE, à l'usage des élèves de

Mathématiques élémentaires, avec des compléments destinés aux élèves de Mathématiques spéciales et indiqués dans le programme d'admission à l'École Polytechnique pour 1886; par M. *Ch. Vacquant,* ancien élève de l'École Normale, ancien professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis, inspecteur général de l'Instruction publique, et M. *A. Macé de Lépinay,* ancien élève de l'École Normale, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Henri IV. Paris, G. Masson; 1886. In-8° de 400 pages. Prix : 5 fr.

MM. Vacquant et Macé de Lépinay viennent de publier un Ouvrage qui se recommande tout particulièrement à l'attention des professeurs et des élèves.

La Ire Partie comprend toutes les matières contenues dans les programmes du baccalauréat ès sciences et exigées pour l'admission à l'École de Saint-Cyr : la théorie des projections, qui est la base de toute Trigonométrie, y a été exposée avec détails; les questions relatives aux transformations trigonométriques, à la résolution des équations trigonométriques, à la résolution des triangles rectilignes, ont été développées avec soin, et de nombreux exemples indiquent les différentes méthodes.

Les Compléments contiennent les questions particulières au cours de Mathématiques spéciales des lycées; le Chapitre relatif à la division des arcs a été développé, et la question des racines multiples y est étudiée dans tous ses détails. Nous appellerons également l'attention sur le Chapitre relatif à la théorie des équations binômes et à leur application à la recherche des côtés des polygones réguliers. Enfin le Chapitre intitulé : *Notions de Trigonométrie sphérique,* contient, outre l'établissement des formules fondamentales de Trigonométrie sphérique, leur application à la résolution des triangles sphériques rectangles; les quatre cas de résolution des triangles sphériques obliquangles qui peuvent être ramenés à la résolution des triangles rectangles ont été traités par ce procédé, conformément d'ailleurs à l'esprit du nouveau programme d'admission à l'École Polytechnique pour 1886.

De nombreux exercices sont proposés à la fin de chaque

Chapitre; ils comprennent en particulier des questions proposées pour le baccalauréat dans différentes Facultés, des énoncés donnés soit dans les concours académiques, soit au concours général, et enfin des sujets de Trigonométrie proposés à l'agrégation des sciences mathématiques dans les dernières années.

ERRATA DES TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

Page 313. Le logarithme de cotang 18° 19' 10" *est*

0,4800475 *et non* 0,4800475.

La différence entre ce logarithme et le suivant *est*

706 *et non* 705.

RECTIFICATIONS.

Les questions 1533, 1535, 1536, 1538 et 1544 ont été résolues par M. P. Rivereau.

La question 1538 a été résolue par M. Octave Doret, à Orléans.

La question 1272 est résolue 2ᵉ série, t. XIX, p. 133; c'est par erreur qu'elle ne figure pas à la table des questions résolues.

La question 1543 a été résolue par M. Demetrio Valeri, à Modène.

Les questions 1535, 1536, 1537, 1538 et la question posée pour l'admission à l'École centrale en 1884 (2ᵉ session) ont été résolues par M. X. H.

Les questions 1535, 1536 et 1544 ont été résolues par M. E. Barisien, lieutenant à l'État-major général, en mission géodésique à Tunis.

La fin de la question 1546, même tome, p. 487, doit être lue ainsi : Démontrer que le lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle est une parabole, et que l'enveloppe de ce cercle se compose d'une droite et d'un cercle.

Les questions 1520 et 1521 ont été résolues par M. E. Mosnat, professeur au lycée de Toulon.

Les questions 1535 et 1537 ont été résolues par M. E. Payeur, élève de Mathématiques spéciales au lycée de Bar-le-Duc.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME IV, 3e SÉRIE).

Arithmétique.

Algèbre.

Trigonométrie.

Géométrie élémentaire.

Géométrie supérieure.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Calcul différentiel et intégral.

Mélanges.

Questions proposées.

Questions résolues.

ERRATA.

Tome III (*année* 1884).

Page 561, ligne 15, *mettre une virgule après* paru *et après* Arithmétique.

Page 577, ligne 6, après $C_{m+2,3}$, *au lieu de* z, *lisez* z^3.

Page 577, ligne 8, *au lieu de* forme, *lisez* formule.

Tome IV (*année* 1885).

Page 63, *au lieu de* $\frac{r}{s_r}$, *lisez* $\frac{s_r}{r}$.

Page 63, ligne 3 en remontant, *au lieu de* Δ_y^2, Δ_y^3, *lisez* $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$

Page 78, ligne 8 en remontant, *au lieu de* $\varepsilon_r^{(1)}$, *lisez* $\varepsilon_1^{(1)}$.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE

(TOME IV, 3e SÉRIE).

Pages

0395 Paris — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

